TSpé FICHE D'EXERCICES SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE (exos assez difficiles)

Exercice 1 :

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1$$

On se propose d'utiliser deux méthodes différentes pour étudier le signe de $g(x)$.

1. Méthode 1

a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x.

2. Méthode 2

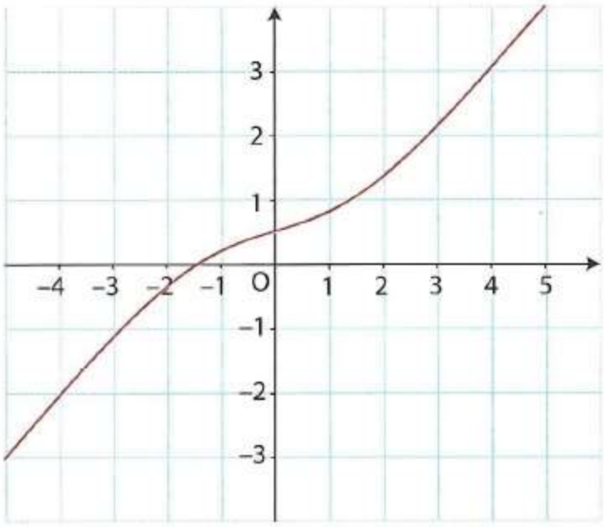
a) Étudier suivant les valeurs de X, le signe de l'expression $X^2 - X + 1$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$$



La courbe Γ représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est dessinée ci-contre.

On note f' la fonction dérivée de f.

On admet que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α.

1. a) Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

b) En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

2. Déterminer le signe de $f(x)$:

- pour tout $x \in [-5 ; \alpha[$;
- pour tout $x \in [\alpha ; 5]$.

3. Avec la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. Justifier.

Exercice 2 :

On se propose de démontrer que la fonction exponentielle est une **fonction convexe**, c'est-à-dire que sa courbe reste toujours au-dessus de ses tangentes.

f est la fonction exponentielle et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

Pour un nombre réel a fixé, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

a) Déterminer, en fonction de a, une équation de la tangente T_a.

b) d est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = f(x) - e^a(x - a) - e^a$$

Étudier le sens de variation de d.

c) En déduire le signe de d. Conclure.

Exercice 3 :

OBJECTIF Étudier une propriété de la courbe de la fonction exponentielle.

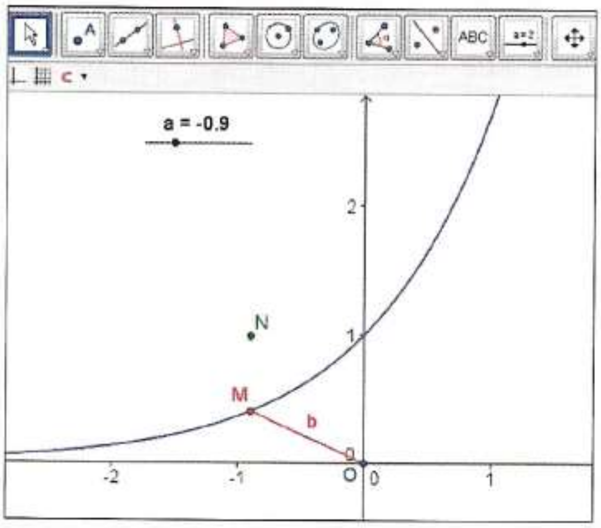
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et M un point de $\mathscr{C}$.

On se propose de déterminer la position du point M pour laquelle la distance OM est minimale.

Partie A : Conjecture

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie :

- construire la courbe $\mathscr{C}$;
- construire un curseur a allant de -2 à 2 avec un incrément de 0,01 ;
- placer le point M $(a ; e^a)$;
- tracer le segment [OM] et afficher sa longueur b ;
- placer le point N $(a ; b)$.



b) Déplacer le curseur et afficher la trace du point N afin de conjecturer la position du point M pour laquelle la distance OM est mininale.

Partie B : Propriétés liées au point M cherché

1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^{2x} + 2x$$

a) Étudier les variations de g.

b) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + x^2$$

a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que la fonction f admet un minimum dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. a) Pour le point M d'abscisse x de $\mathscr{C}$, exprimer la distance OM en fonction de x.

b) En déduire l'abscisse du point M cherché ainsi que la distance OM minimale arrondie au centième. On note M_0 ce point de $\mathscr{C}$.

4. Montrer que la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ en M_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0).

Exercice 4 :

Avant d'acheter un véhicule neuf de 28 000 €, un particulier se renseigne sur le coût de son achat.

1. D'après les informations collectées, il estime pouvoir revendre au bout de t années, son véhicule au prix $V(t) = \dfrac{28}{0,3\,t + 1}$ où $t \in [0 ; 15]$ et $V(t)$ est exprimé en milliers d'euros.

a) Au bout de combien d'années la voiture aura-t-elle perdu 50 % de sa valeur d'achat ?

b) Montrer que V est une fonction décroissante sur l'intervalle [0 ; 15].

c) À partir de quelle année la décote atteint-elle 21 000 € ?

d) Que représente la fonction $t \mapsto 28 - V(t)$ dans cette situation ? En déduire sans calcul ses variations sur [0 ; 15].

2. Après s'être informé sur les révisions nécessaires à l'entretien du véhicule, il estime le coût d'entretien, pour une durée de t années, à $C(t) = 2e^{0,1\,t} - 0,05\,t - 2$ où $t \in [0 ; 15]$ et $C(t)$ est exprimé en milliers d'euros.

Vérifier que C est une fonction strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 15].

3. On s'intéresse maintenant au coût total $f(t)$, exprimé en milliers d'euros, sur les 15 années qui suivent l'achat.

a) Vérifier que, pour tout t de l'intervalle [0 ; 15],

$$f(t) = 26 - \frac{28}{0,3\,t + 1} + 2e^{0,1\,t} - 0,05\,t$$

b) Estimer le coût total au bout de 12 années.

c) Tracer dans un repère la courbe représentative de f.

4. Le coût moyen d'utilisation U, en milliers d'euros, est donné par $U(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ où $t \in [0 ; 15]$.

M est le point d'abscisse t de la courbe de f dans un repère.

a) Interpréter $U(t)$ comme le coefficient directeur d'une droite à préciser.

b) Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle le coût moyen $U(t)$ est minimal.

Exercice 5 :

On se propose d'étudier quelques propriétés des fonc tions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = xe^{-x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2 e^{-x}$$

Partie A

1. Conjecturer :

a) les positions relatives des courbes C_1 et C_2 représen tatives des fonctions f_1 et f_2 dans un repère ;

b) les points d'intersection éventuels des courbes C et C_2 ;

c) les variations de la fonction f_1 ;

d) les extrema de la fonction f_2.

2. Valider les conjectures émises par des calculs.

3. Tracer dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes C_1 et C_2.

Partie B

a désigne un nombre réel fixé.

1. Déterminer en fonction de a l'ordonnée du point T intersection de l'axe des ordonnées et de la tangente à C_1 au point d'abscisse a.

2. T est le point de l'axe des ordonnées tel que $\overrightarrow{OT} = \alpha \vec{j}$

a) Utiliser la courbe C_2 pour étudier suivant les valeur de α, le nombre de tangentes à C_1 passant par T.

b) En déduire une construction géométrique de ce éventuelles tangentes.

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul, $e^{-x} \leqslant e^x$.

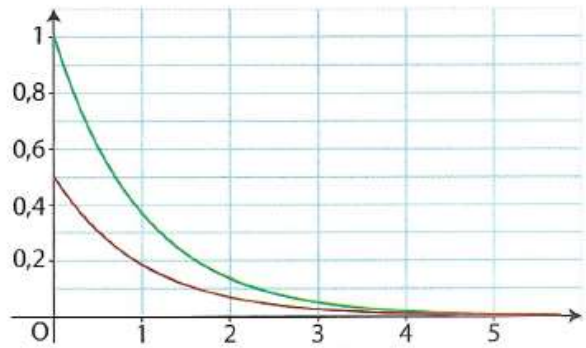
3. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2e^x}$$

Sur le graphique ci-dessous sont tracées, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.



a) Démontrer que pour tout nombre réel x positif ou nul, $h(x) \leqslant f(x) < g(x)$.

b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1 et Γ_2 ? Reproduire le graphique précédent et tracer sur ce graphique la courbe Γ en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 7 :

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier les variations de f.

2. a désigne un nombre réel strictement positif et T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

a) Déterminer une équation de T_a.

b) Montrer que T_a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{a}{a^2 + a + 1}$.

c) Montrer que $T_{\frac{1}{a}}$ coupe l'axe des abscisses au même point que T_a.

Exercice 8 :

Un inspecteur qui arrive sur le lieu du crime demande au médecin légiste de prendre la température de la victime qui est de 32 °C. Il prend alors la température de la pièce qui est de 20 °C. La loi de Newton sur le refroidissement d'un objet en milieu ambiant permet de modéliser la température de la victime en posant $T(t) = Ae^{ct} + 20$ où $t \in [0 ; 24]$ représente le temps, exprimé en heures, depuis l'arrivée de l'inspecteur et $T(t)$ la température de la victime à l'instant t en degrés Celsius ($A \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$). Sachant qu'une demi-heure plus tard la température de la victime est de 31 °C, déterminer l'heure du crime.

CORRECTION FICHE

Exercice 1 :

Partie A : 1. a) $\left(e^x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=e^{2x}-e^x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$
$=e^{2x}-e^x+1=g(x)$

b) Pour tout nombre réel x, $g(x)>0$

2. a) $\Delta=-3>0$

Donc pour tout nombre réel X, $X^2-X+1>0$ (signe du coefficient de X^2)

b) Donc, pour tout nombre réel x, $(e^x)^2-e^x+1>0$

Partie B : 1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=1-\frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)^2-3e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}-e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

b) Pour tout nombre réel x, $f'(x)>0$ car pour tout nombre réel x, $g(x)>0$

x	-5	α	5
f'		$+$	
f	$-3-\frac{3e^{-5}}{e^{-5}+1}$ ↗	0 ↗	$7-\frac{3e^5}{e^5+1}$

2. Pour tout $x\in[-5\,;\alpha[$, $f(x)<0$ car la fonction est croissante sur $[-5\,;5]$

De même, pour tout $x\in[\alpha\,;5]$, $0\leqslant f(x)$

3. Avec la calculatrice, $\alpha\in[-1{,}42\,;-1{,}41]$

Exercice 2 :

2. a) T_a a pour équation $y=e^a(x-a)+e^a$

b) Pour tout nombre réel x, $d'(x)=e^x-e^a$

$d'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow e^x\geqslant e^a \Leftrightarrow x\geqslant a$

$d'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow e^x\leqslant e^a \Leftrightarrow x\leqslant a$

Donc d est strictement décroissante sur $]-\infty\,;a]$ et strictement croissante sur $[a\,;+\infty[$.

d admet un minimum $d(a)=0$.

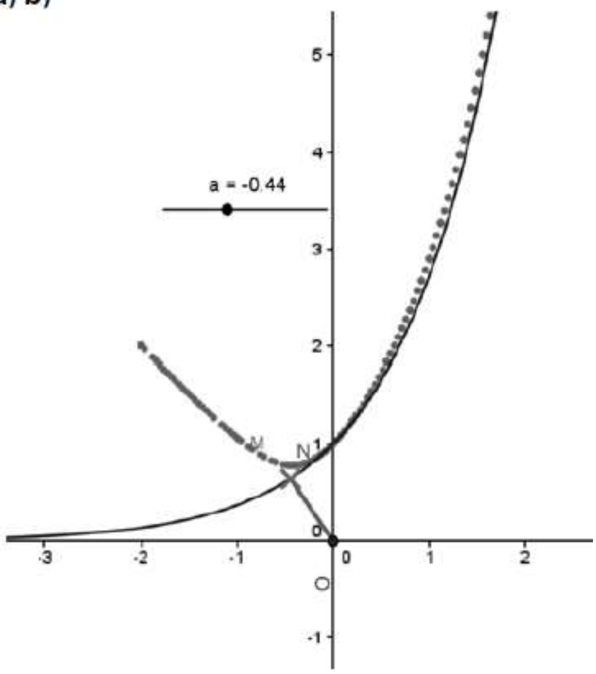
c) Pour tout nombre réel x, $d(x)\geqslant 0$

Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T_a sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Partie A

1. a) b)



La longueur OM est minimale pour $a = -0{,}44$.

Partie B

1. a) Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 4\,e^{2x} + 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
g est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $\alpha \approx -0{,}44$.

c) D'après les variations de la fonction g :
- $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$;
- $g(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha\,;+\infty[$.

2. a) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2\,e^{2x} + 2x = g(x)$.
f' a le même signe que g sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction :
- strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha[$;
- strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

b) f admet un minimum $f(\alpha) \approx 0{,}6$.

3. a) $OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{x^2 + (e^x)^2} = \sqrt{x^2 + e^{2x}}$

b) OM est minimale signifie que la fonction $x \mapsto x^2 + e^{2x}$ admet un minimum pour $x = \alpha$. La valeur minimale de OM recherchée est $\sqrt{f(\alpha)} \approx 0{,}77$.

c) La tangente T_0 a pour coefficient directeur $m = e^{\alpha}$
La droite (OM_0) a pour coefficient directeur
$m' = \dfrac{y_{M_0}}{x_{M_0}} = \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha}$. D'où $m \times m' = e^{\alpha} \times \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha} = \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}$

avec $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\,e^{2\alpha} + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow e^{2\alpha} = -1$.
Conclusion : $m \times m' = -1$.

Exercice 4 :

1. a) $v(t) = \dfrac{28}{2} = 14 \Leftrightarrow \dfrac{28}{0{,}3t+1} = 14 \Leftrightarrow 0{,}3t + 1 = \dfrac{28}{14}$
$\Leftrightarrow t = \dfrac{10}{3}$

Au bout de 4 ans.

b) $v(t) = 28 \times \dfrac{1}{u(t)}$ avec $u(t) = 0{,}3t + 1$ dérivable sur $[0\,;15]$ tel que $u'(t) = 0{,}3$.
v est donc dérivable sur $[0\,;15]$ et pour tout réel $t \in [0\,;15]$, $v'(t) = 28 \times \dfrac{-u'(t)}{u^2(t)}$

$v'(t) = 28\dfrac{-0{,}3}{(0{,}3t+1)^2} = \dfrac{-8{,}4}{(0{,}3t+1)^2} < 0$ sur $[0\,;15]$.
V est donc une fonction strictement décroissante sur $[0\,;15]$

c) $V(t) = 7 \Leftrightarrow \dfrac{28}{0{,}3t+1} = 7 \Leftrightarrow 0{,}3t + 1 = \dfrac{28}{7} \Leftrightarrow t = 10$

Au bout de 10 ans.

d) La fonction $28 - v(t)$ représente la décote du véhicule.
$-v(t)$ est une fonction strictement croissante sur $[0\,;15]$ donc $28 - v(t)$ est aussi une fonction strictement croissante sur $[0\,;15]$.

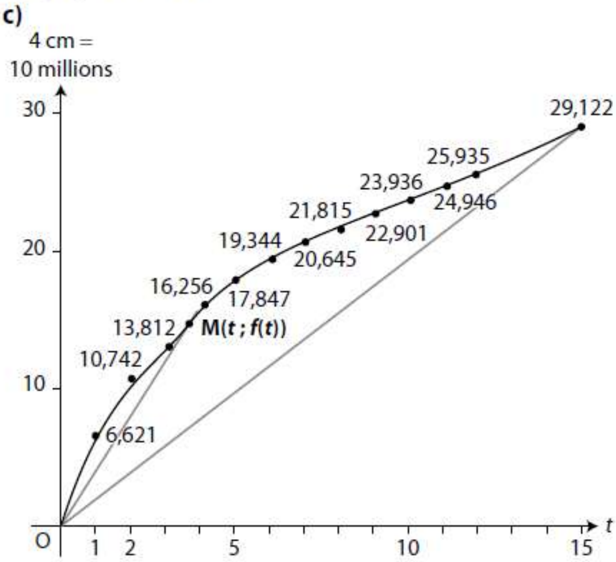
2. $C(t) = u(t) + v(t)$ avec $u(t)$ avec $u(t) = 2e^{0,1t}$ et $v(t) = -0{,}05t - 2$ dérivables sur $[0\,;15]$ telles que :
$u'(t) = 0{,}2\,e^{0,1t}$ et $v'(t) = -0{,}05$
C est donc une fonction dérivable sur $[0\,;15]$ et pour tout réel x, $C'(t) = 0{,}2\,e^{0,1t} - 0{,}05 = 0{,}2\,(e^{0,1t} - 0{,}25)$
$e^{0,1t} > 1$ sur $[0\,;15]$
$e^{0,12} - 0{,}25 > 0{,}75$ sur $[0\,;15]$
$C'(t) > 0$ sur $[0\,;15]$
C est donc une fonction strictement croissante sur $[0\,;15]$

3. a) $f(t) = 28 - v(t) + C(t)$ (Décote + frais d'entretien)
$= 28 - \dfrac{28}{0{,}3t+1} + 2e^{0,1t} - 0{,}05t - 2$

$f(t) = 26 - \dfrac{28}{0{,}3t+1} + 2e^{0,1t} - 0{,}05t$

b) $f(12) \simeq 25\,953$ €

c)



4. a) $u(t)$ est le coefficient directeur de la droite (OM).

b) $u(t)$ minimale pour $t = 15$

Exercice 5 :

Partie A

1. Il semble que :

a) C_1 est au-dessus de C_2 sur $[0\,;1]$;

C_1 est au-dessous de C_2 sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

b) $I_1\,(0\,;0)$ et $I_2\,(1\,;0{,}3)$ soient les points d'intersection de C_1 et C_2.

c)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

d) $f_2(0) = 0$ est un mimimum de f_2

$f_2(2) = 0{,}54$ est un maximum local de f_2

2. • Conjecture *a*

$f_1(x) - f_2(x) = e^x\,(x - x^2)$ a le même signe que $x - x^2$ donné dans le tableau ci-dessous

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f_1(x) - f_2(x) > 0$ sur $]0\,;1[$

$f_1(x) - f_2(x) <$ sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$

donc C_1 est au-dessus de C_2 sur $]0\,;1[$;

C_1 est au-dessous de C_2 sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

• Conjoncture *b*

$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x\,e^{-x} = x^2\,e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}\,(x - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0$

d'où $x = 0$ ou $x = 1$

$f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 1e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$I_1\,(0\,;0)$ et $I_2\,(1\,;\dfrac{1}{e})$ points d'intersection de C_1 et C_2.

• Conjecture c

$f_1(x) = u(x)\,v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$ dérivables sur $\mathbb{R}$.

telles que $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\,e^{-x}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}\,(1 - x)$ a le même signe que $1 - x$ sur $\mathbb{R}$.

$f(1) = \dfrac{1}{e}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	

• Conjecture d

$f_2(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{-x}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\,e^{x}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}\,(2x - x^2)$ a le même signe que $2x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

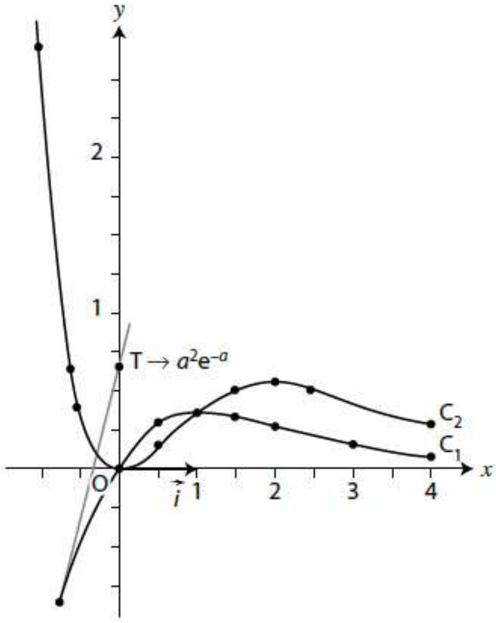
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	

$f(0) = 0$ et $f(2) = 4e^{-2}$

$f(0) = 0$ est un minimum de f_2

$f(2) = 4e^{-2}$ est un maximum local de f_2

3.



Exercice 6 :

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$

$f(-x) = \dfrac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$

f est une fonction paire

L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe de f.

2. Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$e^{-x} \leqslant e^x \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \leqslant e^x \Leftrightarrow 1 \leqslant e^{2x}$$

Sur $[0 ; +\infty[$, $e^{2x} \geqslant 1$, donc $e^{-x} \leqslant e^x$ sur $[0 ; +\infty[$.

3. a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x + e^{-x}$ dérivable sur $[0 ; +\infty[$

telle que $u(x) \neq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ et $u'(x) = e^x - e^{-x}$.

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Comme $e^{-x} \leqslant e^x$ sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

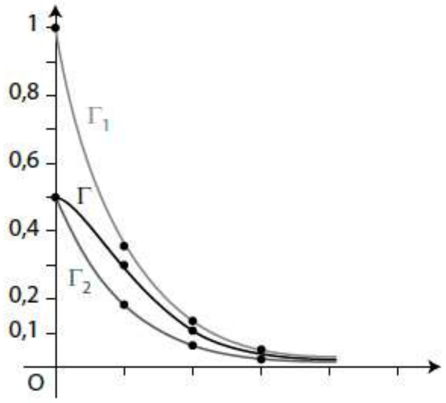
$f(0) = \dfrac{1}{2}$

4. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x < e^x + e^{-x} < 2e^x$

$\dfrac{1}{e^x} > \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \geqslant \dfrac{1}{2e^x}$

$h(x) \leqslant f(x) < g(x)$

b) Γ est au-dessus de Γ_2 et au-dessous de Γ_1 sur $[0 ; +\infty[$.



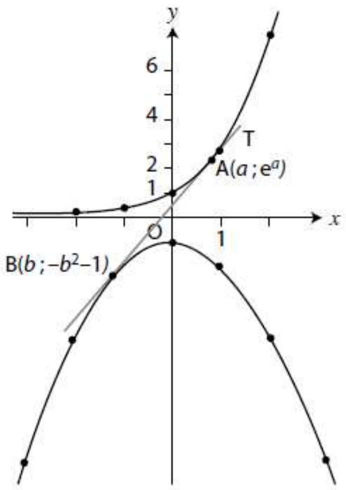
Équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0

$y = f'(0)\,x + f(0)$

$y = \dfrac{1}{2}$

Exercice 7 :

1.



$f(x) = v(x)\,e^{u(x)}$ avec $v(x) = x + 1$ et $u(x) = \dfrac{-1}{x}$ dérivables sur $]0 ; +\infty[$ telles que $v'(x) = 1$ et $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x+1) \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0 \text{ sur }]0 ; +\infty[$$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2} \right)$

f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

2. a) Équation de T_a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$$y = e^{-\frac{1}{a}} \left(\frac{a^2 + a + 1}{a^2} \right)(x - a) + (a+1)\,e^{-\frac{1}{a}}$$

$$y = \left(\frac{a^2 + a + 1}{a^2} \right) e^{-\frac{1}{a}} x - e^{-\frac{1}{a}} \left(\frac{a^2 + a + 1}{a} - a - 1 \right)$$

$$y = \left(\frac{a^2 + a + 1}{a^2} \right) e^{-\frac{1}{a}} x - e^{-\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} \right)$$

b) $y = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a^2 + a + 1}{a^2} \right) e^{-\frac{1}{a}} x - e^{-\frac{1}{a}} \left(\dfrac{1}{a} \right) = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{a^2 + a + 1}{a^2} \right)} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{a^2 + a + 1}$

c) $T_{\frac{1}{a}}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisses

$$x = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} + 1} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1 + a + a^2}{a^2}} = \frac{a}{a^2 + a + 1}$$

Exercice 8 :

$T(t) = Ae^{ct} + 20$ sur $[0 ; 24]$.

$T(0) = A + 20 = 32$

$A = 12$

$T(0,5) = 12e^{0,5c} + 20 = 31$

$12e^{0,5c} = 11$

$e^{0,5c} = \frac{11}{12}$

$(e^{0,5c})^2 = \frac{121}{144}$

$e^{c} = \frac{121}{144}$

Heure du crime tel que $T(t) = 12e^{ct} + 20 = 37$

$\Leftrightarrow 12e^{ct} = 17 \Leftrightarrow e^{ct} = \frac{17}{12} \Leftrightarrow (e^{c})^{t} = \left(\frac{121}{144}\right)^{t} = \frac{17}{12}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{121}{144}\right)^{t} = \frac{17}{12} \Leftrightarrow t \approx 2$ h d'après le tableur de la calculatrice.