Fiche d'exercices: Révisions Fonction Exponentielle

28 Compléter les pointillés dans chaque égalité.

1. $e^{\cdots} \times e^7 \times e^{-2} = e^3$
2. $(e^3)^4 \times e^{\cdots} = e^3 \times e^{-1}$
3. $\dfrac{e^{\cdots}}{e^3} = e^{-1}$
4. $\dfrac{e}{e^{\cdots}} = \dfrac{e^2}{e^5}$

29 x est un nombre réel. Simplifier les expressions.

1. $e^{-2x+1} \times e^{x+3}$
2. $e^{x+4} \times (e^x)^2 \times e^{-2x}$
3. $e^x \times e$
4. $e^x \times xe^x$

30 x est un nombre réel. Simplifier les expressions.

1. $\dfrac{e^x \times (e^x)^2}{e^{2x}}$
2. $\dfrac{e^{x+4}}{e^{4x}}$
3. $\dfrac{1}{e^{3-2x}}$

31 Déterminer le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3e^x$
2. $g(x) = 2e^{-5x}$
3. $h(x) = -\sqrt{2}e^{-3x}$

32 Déterminer le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \dfrac{1+e^{4x}}{x^2+2}$
2. $g(x) = \dfrac{-9}{-2-e^{-8x}}$

33 Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3e^x - 5x^2 + 2$
2. $f(x) = x - 4e^x + 1$
3. $f(x) = e^x + e^3$
4. $f(x) = xe^x$

34 Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et en déduire son tableau de variations.

1. $f(x) = e^{3x}$
2. $f(x) = e^{-2x}$
3. $f(x) = e^{-x+4}$
4. $f(x) = 5e^{x+6}$

35 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^x = e^{-2}$
2. $e^x = e$
3. $e^{x+2} = e^3$
4. $e^{2x+1} = e$
5. $e^x = 1$
6. $e^x + 4 = 0$
7. $e^{x^2} = e$
8. $e^{x^2+1} = 1$

36 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{-x} = 1$
2. $e^{2x-3} = e$
3. $5e^{3x+1} = 5$
4. $-2e^{x^2} = 3$

37 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{2x} > e^{-2}$
2. $e^{-3x} < e$
3. $e^{3x-5} \geqslant e^{-3}$
4. $e^{-2x-1} \leqslant 1$

50 [Calculer]

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $A = e^2 \times e^{32} \times e^8$
2. $B = \dfrac{e}{e^5}$
3. $C = \dfrac{(e^7)^3 \times e^4}{e^{-4}}$

51 [Calculer]

x est un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $a(x) = e^{2x} \times (e^x)^2 \times e^{-3x}$
2. $b(x) = \dfrac{e^{x^2}}{e^x}$
3. $c(x) = \dfrac{e^{x-1} \times e^{4x}}{e^x}$
4. $d(x) = \dfrac{e^{-2x}}{e^{-3x} \times e^{x+1}}$

52 [Calculer]

t est un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $d(t) = e^{3t} \times e^{1-6t} \times (e^{2t+1})^3$
2. $e(t) = \dfrac{e^{8t-3}}{e^{2t+5}}$
3. $f(t) = \dfrac{e^{-2t+1} \times e^{6t+5}}{e^{-4t-2}}$

53 [Calculer]

n est un entier rèlatif quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $u(n) = e^{2n+1} \times e^{3n-4}$
2. $v(n) = \dfrac{e^{5n-3}}{e^{-2n+1}}$
3. $w(n) = (e^{2n-1})^2 \times e^{3n+4}$

54 [Calculer]

x est un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $g(x) = (e^{4x-5} \times e^{3x+2})^3$
2. $h(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{-x} \times (e^{-3x})^2}$

56 [Calculer]

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = e^4(e^3 + e^7)$
2. $B = (e^2 + e^6)(e^3 + e)$
3. $C = (e^8 - e^2)(e^6 + 1)$
4. $D = (e^{-2} + e^3)(e^{-2} - e^8)$

57 [Calculer]

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = (e^3 + e^5)^2$
2. $B = (e^2 - e^{-2})^2$
3. $C = (e^6 - e^{-4})(e^6 + e^{-4})$
4. $D = (2e^4 - 3e^{-1})^2$

58 [Calculer]

t est un réel quelconque. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(t) = (e^t - 1)(e^t + 1)$
2. $B(t) = (e^t + 3)^2$
3. $C(t) = (e^{2t} - 2)^2$

59 [Calculer]

x est un réel quelconque. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $D(x)=(e^{x}+e^{-2x})^2$
2. $E(x)=(e^{3x}-e^{5x})^2$
3. $F(x)=(e^{-2x}-e^{x})(e^{-2x}+e^{x})$

60 [Calculer]

x est un réel quelconque. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $O(x)=(e^{x}+e^{-x})^2+(e^{x}-e^{-x})^2$
2. $P(x)=(e^{x}+e^{-x})^2-(e^{x}-e^{-x})^2$

61 [Calculer]

Démontrer les égalités suivantes pour tout réel x.

1. $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}}=1-e^{-x}$
2. $\dfrac{1}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}-1}$

62 [Calculer]

Démontrer l'égalité suivante pour tout réel x.

$(e^{x}+e^{-x})(e^{2x})^2=e^{3x}(e^{2x}+1)$

68 [Raisonner]

On cherche une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $4f'(x)+3f(x)=0$. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont solutions de cette équation ?

1. $g : x\mapsto e^{x}$
2. $h : x\mapsto 0$
3. $p : x\mapsto e^{-\frac{3x}{4}}$
4. $q : x\mapsto 4e^{-3x}$

69 [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=5e^{x}-x^2$
2. $f(x)=xe^{x}$
3. $f(t)=2e^{-t}+6t^3-3e^5$
4. $f(t)=e^{-3}\times e^{2t}+e^{-4t}$
5. $f(t)=-8te^{-3t+1}$

70 [Calculer]

Déterminer la fonction dérivée, sous forme factorisée, de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=(x+1)e^{x}$
2. $f(x)=(-2x+3)e^{x}$
3. $f(x)=x^2e^{x}$
4. $f(x)=(x^2-3x+1)e^{x}$

71 [Calculer]

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1. $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x}$
2. $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}$

72 [Calculer]

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, donner le domaine de définition ainsi que l'expression de la fonction dérivée f'.

1. $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$
2. $f(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$
3. $f(x)=e^{x}+1$
4. $f(t)=\dfrac{e^{t}+1}{t-1}$

73 [Calculer]

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x-4}=e$
2. $e^{x^2+x}=1$
3. $e^{-x^2}=\dfrac{1}{e}$
4. $3+e^{x}=1$

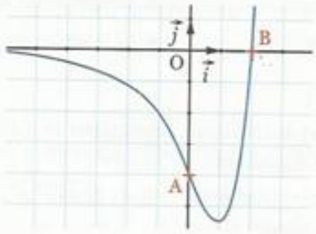
74 [Calculer]

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $(e^{x}-1)(e^{x}+1)=0$
2. $(3x+1)e^{x}=0$
3. $(2x-1)e^{x}=e^{x}$
4. $xe^{x+3}=2e^{x+3}$
5. $-e^{x^2+3}=\dfrac{1}{e^{x+3}}$

76 [Chercher]

On a tracé la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On sait que pour tout réel x, $f(x)=(ax+b)e^{x}$, où a et b sont des réels.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$.
2. En déduire la valeur des réels a et b.

77 [Calculer]

1. Montrer que, pour tout réel t, on a $3t^2+5t-2=(3t-1)(t+2)$.
2. En déduire la résolution de $(3t^2+5t-2)e^{2t-1}=0$.

78 [Calculer]

Résoudre le système d'équations suivant $\begin{cases} e^{x}\times e^{y}=e^{3} \\ \dfrac{e^{x}}{e^{y}}=1 \end{cases}$

79 [Calculer]

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x+3}<e^{4}$
2. $e^{-2x+1}>e^{x-7}$
3. $e^{9t-1}\leqslant e^{4t}$
4. $e^{t+4}\geqslant e^{-3t}$

80 [Calculer]

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x+1}<1$
2. $-3e^{x^2-4}>4$
3. $e^{-2x+5}\geqslant 0$
4. $e^{x+4}\leqslant\dfrac{1}{e^{3x}}$

89 [Raisonner.] DÉMO

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x-1$.

1. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse $x=0$.

2. Tracer dans un repère la courbe représentant la fonction exponentielle ainsi que sa tangente au point d'abscisse $x=0$.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)\geqslant 0$.

5. En déduire que la courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

91 [Calculer.]

On considère la fonction h définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1. Montrer que la courbe représentative de h dans un repère admet l'origine comme centre de symétrie.

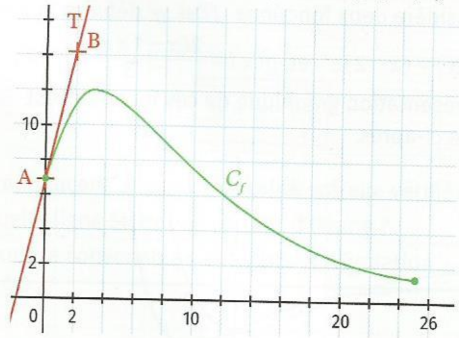
2. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction h vérifie $h'=1-h^2$.

93 [Représenter.]

D'après Bac ES - Asie - 2018.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $I=[0\,;25]$ par $f(x)=(ax+b)e^{-0,2x}$ où a et b sont deux nombres réels. On a représenté également sa tangente T au point $A(0\,;7)$. T passe par le point $B(2\,;14,2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=6$.

2. a. Par lecture graphique, donner $f(0)$.

b. Écrire $f(0)$ en fonction de a et b.

c. En déduire que sur I, $f(x)=(ax+7)e^{-0,2x}$.

3. a. Quel est le coefficient directeur de la droite T ?

b. Exprimer, pour tout $x\in I$, $f'(x)$ en fonction de a.

c. En déduire que, pour tout $x\in I$, $f(x)=(5x+7)e^{-0,2x}$.

4. On souhaite connaître le maximum de la fonction f sur I.

a. Montrer que, pour tout $x\in I$, $f'(x)=(-x+3,6)e^{-0,2x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur I.

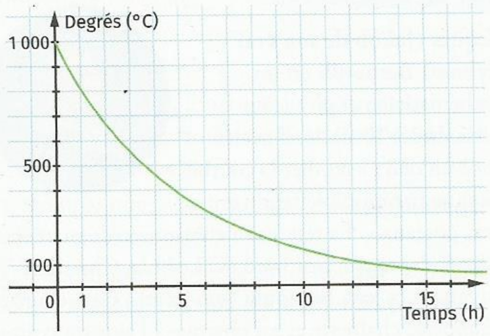
c. En déduire le maximum de f sur I.

96 [Modéliser.]

D'après Bac S - Pondichery - 2018.

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000°C. À la fin de la cuisson, il est éteint.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La courbe représente la température du four en fonction du temps. La température du four, à l'instant t, est donnée par la fonction f définie pour tout nombre réel $t \geqslant 0$ par : $f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20$.



1. Au bout de combien de temps la température est-elle inférieure à 200°C ?

2. Calculer $f'(t)$ pour tout nombre $t \geqslant 0$ et en déduire les variations de f.

3. Démontrer que la température à l'intérieur du four ne peut jamais être inférieure à 20°C.

4. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$: $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$.

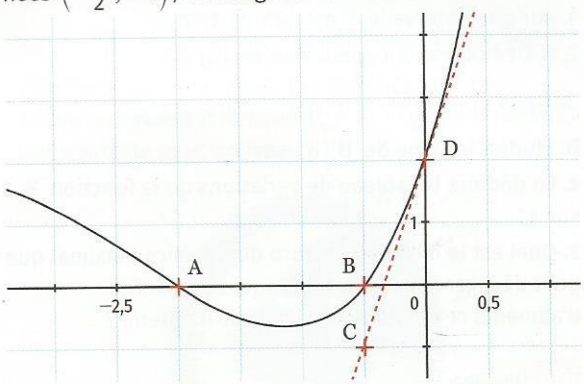
97 [Représenter.]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx}$ où a, b, c et k sont des réels fixés.

La courbe représentative de la fonction f est donnée dans un repère orthogonal.

Celle-ci passe par les points A, B et D de coordonnées respectives $(-2\,;0)$, $\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $(0\,;2)$.

De plus, la droite (CD), où C est le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;-1\right)$, est tangente à la courbe en $x = 0$.



À l'aide de toutes ces informations, retrouver les valeurs des paramètres a, b, c et k.

100 [Modéliser.]

Une entreprise fabrique x centaines d'objets, où x appartient à l'intervalle $[0\,;40]$.

On suppose que toute la production de l'entreprise est vendue et que le bénéfice, en milliers d'euros, de cette entreprise peut être modélisé par une fonction f définie sur $[0\,;40]$ par $f(x) = (10x - 10)e^{-0,1x}$.

1. Déterminer la perte de l'entreprise lorsqu'il n'y a pas de production.

2. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel sera alors le montant de ce bénéfice ?

3. À partir de quelle quantité produite et vendue l'entreprise réalise un bénéfice ?

CORRIGE FICHE EXPONENTIELLE

Corrigé exercice 28 :

1. $e^{-2} \times e^7 \times e^{-2} = e^3$
2. $(e^3)^4 \times e^{-10} = e^3 \times e^{-1}$
3. $\dfrac{e^2}{e^3} = e^{-1}$
4. $\dfrac{e}{e^4} = \dfrac{e^2}{e^5}$

Corrigé exercice 29 :

1. $e^{-2x+1} \times e^{x+3} = e^{-2x+1+x+3} = e^{-x+4}$
2. $e^{x+4} \times (e^x)^2 \times e^{-2x} = e^{x+4} \times e^{2x} \times e^{-2x} = e^{x+4+2x-2x} = e^{x+4}$
3. $e^x \times e = e^x \times e^1 = e^{x+1}$
4. $e^x \times xe^x = x \times e^{x+x} = x \times e^{2x}$

Corrigé exercice 30 :

1. $\dfrac{e^x \times (e^x)^2}{e^{2x}} = \dfrac{e^x \times e^{2x}}{e^{2x}} = \dfrac{e^{x+2x}}{e^{2x}} = e^{3x-2x} = e^x$
2. $\dfrac{e^{x+4}}{e^{4x}} = e^{x+4-4x} = e^{-3x+4}$
3. $\dfrac{1}{e^{3-2x}} = e^{-(3-2x)} = e^{2x-3}$

Corrigé exercice 31 :

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $3 > 0$ donc $f(x) > 0$.
2. Pour tout réel x, $e^{-5x} > 0$ et $2 > 0$ donc $g(x) > 0$.
3. Pour tout réel x, $e^{-3x} > 0$ et $-\sqrt{2} < 0$, donc $h(x) < 0$.

Corrigé exercice 32 :

1. Pour tout réel x, $e^{4x} > 0$ donc le numérateur est strictement positif. De plus pour tout réel x, $x^2 + 2 > 0$. Donc, au final, f est positive.
2. Pour tout réel x, $-e^{-8x} < 0$, donc le dénominateur est strictement négatif. Le numérateur étant lui aussi négatif, la fonction g est donc positive.

Corrigé exercice 33 :

1. $f'(x) = 3e^x - 5 \times 2x + 0 = 3e^x - 10x$.
2. $f'(x) = 1 - 4e^x + 0 = 1 - 4e^x$.
3. $f'(x) = e^x + 0 = e^x$.
4. $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$ (dérivée d'un produit).

Corrigé exercice 34 :

1. $f'(x) = 3 \times e^{3x} = 3e^{3x}$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = -2 \times e^{-2x} = -2e^{-2x}$, f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. $f'(x) = -1 \times e^{-x+4} = -e^{-x+4}$, f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. $f'(x) = 5 \times 1 \times e^{x+6} = 5e^{x+6}$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 35 :

1. $e^x = e^{-2} \Leftrightarrow x = -2$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-2\}$.
2. $e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.
3. $e^{x+2} = e^3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.
4. $e^{2x+1} = e \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.
5. $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.
6. $e^x + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = -4$ ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. L'équation n'admet aucune solution : $S = \varnothing$.
7. $e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$. Donc $S = \{-1; 1\}$.
8. $e^{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+1} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible, donc $S = \varnothing$.

Corrigé exercice 36 :

1. $e^{-x}=1 \Leftrightarrow e^{-x}=e^0 \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$
2. $e^{2x-3}=e \Leftrightarrow e^{2x-3}=e^1 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow x=2$
3. $5e^{3x+1}=5 \Leftrightarrow e^{3x+1}=1 \Leftrightarrow e^{3x+1}=e^0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$
4. $-2e^{x^2}=3 \Leftrightarrow e^{x^2}=-\frac{3}{2}$ ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. L'équation n'admet aucune solution : $S=\varnothing$.

Corrigé exercice 37 :

1. $e^{2x}>e^{-2} \Leftrightarrow 2x>-2 \Leftrightarrow x>-1$ donc l'ensemble des solutions est $S=]-1;+\infty[$.
2. $e^{-3x}<e \Leftrightarrow e^{-3x}<e^1 \Leftrightarrow -3x<1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$ donc $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$
3. $e^{3x-5}\geqslant e^{-3} \Leftrightarrow 3x-5\geqslant -3 \Leftrightarrow 3x\geqslant 2 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{2}{3}$ donc $S=\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$
4. $e^{-2x-1}\leqslant 1 \Leftrightarrow e^{-2x-1}\leqslant e^0 \Leftrightarrow -2x-1\leqslant 0 \Leftrightarrow -2x\leqslant 1 \Leftrightarrow x\geqslant -\frac{1}{2}$ donc
   $\cancel{S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[}$ $S=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Corrigé exercice 50 :

1. $A=e^{2+32+8}=e^{42}$
2. $B=\frac{e^1}{e^5}=e^{1-5}=e^{-4}$
3. $C=e^{7\times3+4-(-4)}=e^{29}$

Corrigé exercice 51 :

1. $a(x)=e^{2x}\times e^{2x}\times e^{-3x}=e^{2x+2x+(-3x)}=e^x$
2. $b(x)=e^{x^2-x}$
3. $c(x)=e^{x-1+4x-x}=e^{4x-1}$
4. $d(x)=e^{-2x-(-3x+x+1)}=e^{-1}$

Corrigé exercice 52 :

1. $d(t)=e^{3t}\times e^{1-6t}\times e^{6t+3}=e^{3t+1-6t+6t+3}=e^{3t+4}$
2. $e(t)=e^{8t-3-(2t+5)}=e^{6t-8}$
3. $f(t)=e^{-2t+1+6t+5-(-4t-2)}=e^{8t+8}$

Corrigé exercice 53 :

1. $u(n)=e^{2n+1+3n-4}=e^{5n-3}$

Corrigé exercice 54 :

1. $g(x)=(e^{4x-5+3x+2})^3=(e^{7x-3})^3=e^{21x-9}$
2. $h(x)=\frac{e^{3x}}{e^{-x}\times e^{-6x}}=e^{3x-(-x)-(-6x)}=e^{10x}$

Corrigé exercice 56 :

1. $A=e^4\times e^3+e^4\times e^7=e^{4+3}+e^{4+7}=e^7+e^{11}$
2. $B=e^2\times e^3+e^2\times e+e^6\times e^3+e^6\times e=e^5+e^3+e^9+e^7$
3. $C=e^8\times e^6+e^8-e^2\times e^6-e^2=e^{14}+e^8-e^8+e^2=e^{14}+e^2$
4. $D=e^{-2}\times e^{-2}-e^{-2}\times e^8+e^3\times e^{-2}-e^3\times e^8=e^{-4}-e^6+e-e^{11}$

Corrigé exercice 57 :

1. $A=(e^3)^2+2\times e^3\times e^5+(e^5)^2=e^6+2e^8+e^{10}$
2. $B=(e^2)^2-2\times e^2\times e^{-2}+(e^{-2})^2=e^4-2+e^{-4}$
3. $C=(e^6)^2-(e^{-4})^2=e^{12}-e^{-8}$
4. $D=4e^8-2\times 2e^4\times 3e^{-1}+9e^{-2}=4e^8-12e^3+9e^{-2}$

Corrigé exercice 58 :

1. $A=(e^t)^2-1^2=e^{2t}-1$
2. $B=(e^t)^2+2\times e^t\times 3+3^2=e^{2t}+6e^t+9$
3. $C=(e^{2t})^2-2\times e^{2t}\times 2+2^2=e^{4t}-4e^{2t}+4$

Corrigé exercice 59 :

1. $D=(\mathrm{e}^{x})^2+2\times\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-2x}+(\mathrm{e}^{-2x})^2=\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-4x}$
2. $E=(\mathrm{e}^{3x})^2-2\times\mathrm{e}^{3x}\times\mathrm{e}^{5x}+(\mathrm{e}^{5x})^2=\mathrm{e}^{6x}-2\mathrm{e}^{8x}+\mathrm{e}^{10x}$
3. $F=(\mathrm{e}^{-2x})^2-(\mathrm{e}^{x})^2=\mathrm{e}^{-4x}-\mathrm{e}^{2x}$

Corrigé exercice 60 :

1. $O=\mathrm{e}^{2x}+2\times\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{2x}-2\times\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}$
   $O=\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}$
   $O=2\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{-2x}$
2. $P=\mathrm{e}^{2x}+2\times\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}-(\mathrm{e}^{2x}-2\times\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})$
   $P=\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{2x}+2-\mathrm{e}^{-2x}$
   $P=4$

Corrigé exercice 61 :

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}=1-\mathrm{e}^{-x}$
2. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}\times\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{(\mathrm{e}^{x})^2-1^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$

Corrigé exercice 62 :

On a $(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})\times(\mathrm{e}^{2x})^2=(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})\times\mathrm{e}^{4x}=(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})\times\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{3x}=(\mathrm{e}^{2x}+1)\times\mathrm{e}^{3x}$.

Corrigé exercice 68 :

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $4g'(x)+3g(x)=4\mathrm{e}^{x}+3\mathrm{e}^{x}=7\mathrm{e}^{x}\neq 0$. Donc cette fonction g n'est pas solution de cette équation.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $4h'(x)+3h(x)=4\times 0+3\times 0=0$. La fonction h est donc solution de cette équation.
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $p'(x)=-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3x}{4}}$. On a donc
   $4p'(x)+3p(x)=4\times\left(-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3x}{4}}\right)+3\times\mathrm{e}^{-\frac{3x}{4}}=0$. p est donc solution de l'équation.
4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $4q'(x)+3q(x)=4\times(-12\mathrm{e}^{-3x})+3\times 4\mathrm{e}^{-3x}=-36\mathrm{e}^{-3x}$. q n'est donc pas solution de cette équation.

Corrigé exercice 69 :

1. $f'(x)=5\mathrm{e}^{x}-2x$.
2. $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{x}+x\times\mathrm{e}^{x}=(1+x)\mathrm{e}^{x}$, comme dérivée d'un produit de fonctions.
3. $f'(t)=-2\mathrm{e}^{-t}+18t^2$.
4. $f'(t)=2\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{2t}-4\mathrm{e}^{-4t}=2\mathrm{e}^{2t-3}-4\mathrm{e}^{-4t}$.
5. $f'(t)=-8\mathrm{e}^{-3t+1}+24t\mathrm{e}^{-3t+1}=(24t-8)\mathrm{e}^{-3t+1}$, comme dérivée d'un produit de fonctions.

Corrigé exercice 70 :

On utilise la formule de dérivée d'un produit de fonctions : $(uv)'=u'v+uv'$.

1. $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{x}+(x+1)\mathrm{e}^{x}=(2+x)\mathrm{e}^{x}$
2. $f'(x)=-2\times\mathrm{e}^{x}+(-2x+3)\mathrm{e}^{x}=(-2x+1)\mathrm{e}^{x}$
3. $f'(x)=2x\times\mathrm{e}^{x}+x^2\mathrm{e}^{x}=(2x+x^2)\mathrm{e}^{x}$
4. $f'(x)=(2x-3)\mathrm{e}^{x}+(x^2-3x+1)\mathrm{e}^{x}=(x^2-x-2)\mathrm{e}^{x}$

Corrigé exercice 71 :

On utilise la formule de dérivée d'un quotient de fonctions : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

1. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}\times x-\mathrm{e}^{x}\times 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{x}}{x^2}$
2. $f'(x)=\dfrac{1\times(\mathrm{e}^{x}-1)-x\times\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1-x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$

Corrigé exercice 72 :

1. Pour tout réel x, on a $e^x > 0$, et en particulier $e^x \neq 0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$. Et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$.
2. On a $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{e^x \times (e^x - 1) - (e^x + 1) \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$.
3. Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}$. Et pour tout x réel, $f'(x) = e^x$.
4. Le domaine de définition de la cette fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(t) = \dfrac{e^t \times (t-1) - (e^t + 1) \times 1}{(t-1)^2} = \dfrac{te^t - 2e^t - 1}{(t-1)^2}$.

Corrigé exercice 73 :

1. $e^{x-4} = e \Leftrightarrow e^{x-4} = e^1 \Leftrightarrow x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 5$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{5\}$.
2. $e^{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+x} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-1; 0\}$.
3. $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{-x^2} = e^{-1} \Leftrightarrow -x^2 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-1; 1\}$.
4. $3 + e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = -2$ ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a donc $S = \varnothing$.

Corrigé exercice 74 :

1. $(e^x - 1)(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \text{ ou } e^x + 1 = 0$. Or, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et pour tout réel x, on a $e^x + 1 > 0$. Ainsi $S = \{0\}$.
2. Puisque pour tout réel x, $e^x \neq 0$, alors $(3x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

1. Puisque pour tout réel x, $e^x \neq 0$, on peut donc diviser les deux membres de cette équation par e^x. Ce qui nous donne $2x - 1 = 1x = 1$. Ainsi $S = \{1\}$.
2. Pour tout réel x, $e^{x+3} \neq 0$, on peut donc diviser les deux membres de cette équation par e^{x+3}. Ainsi, $xe^{x+3} = 2e^{x+3} \Leftrightarrow x = 2$. On a donc $S = \{2\}$.
3. Soit x un réel. D'une part $-e^{x^2+3} < 0$ et d'autre part $\dfrac{1}{e^{x+3}} > 0$. L'équation n'a donc pas de solution. L'ensemble des solutions de cette équation est $S = \varnothing$.

Corrigé exercice 76 :

1. On peut voir que $f(0) = -4$ et $f(2) = 0$.
2. Puisque $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b$ et $f(0) = -4$ alors $b = -4$. De plus, $f(2) = (2a - 4)e^2 = 0$. Puisque $e^2 \neq 0$, cela signifie que $2a - 4 = 0$ et donc que $a = 2$. On a donc finalement que $f(x) = (2x - 4)e^x$.

Corrigé exercice 77 :

1. Pour tout réel t, $(3t-1)(t+2) = 3t \times t + 3t \times 2 - 1 \times t - 1 \times 2 = 3t^2 + 6t - t - 2 = 3t^2 + 5t - 2$.
2. Puisque pour tout réel t, $e^{2t-1} \neq 0$ alors $(3t^2 + 5t - 2)e^{2t-1} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 5t - 2 = 0$. De plus, d'après la première question, résoudre cette équation revient à résoudre l'équation $(3t-1)(t+2) = 0$. Et on obtient alors que $t = \dfrac{1}{3}$ ou $t = -2$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \left\{-2; \dfrac{1}{3}\right\}$.

Corrigé exercice 78 :

$$\begin{cases} e^x \times e^y = e^3 \\ \frac{e^x}{e^y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e^3 \\ e^{x-y} = e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Corrigé exercice 79 :

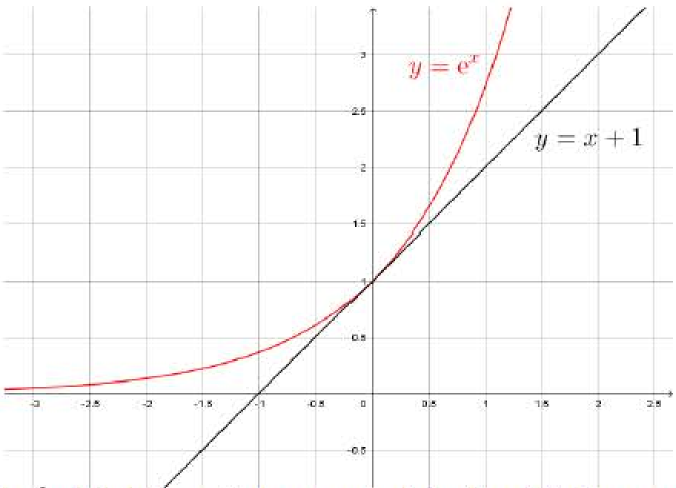
1. $e^{x+3} < e^4 \Leftrightarrow x+3 < 4$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $x < 1$. On a donc $S =]-\infty ; 1[$.
2. De même $e^{-2x+1} > e^{x-7} \Leftrightarrow -2x+1 > x-7 \Leftrightarrow -3x > -8 \Leftrightarrow x < \dfrac{8}{3}$.
   L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S = \left]-\infty ; \dfrac{8}{3}\right[$.
3. De même $e^{9t-1} \leqslant e^{4t} \Leftrightarrow 9t-1 \leqslant 4t \Leftrightarrow t \leqslant \dfrac{1}{5}$. Ainsi $S = \left]-\infty ; \dfrac{1}{5}\right]$.
4. De même $e^{t+4} \geqslant e^{-3t} \Leftrightarrow t+4 \geqslant -3t \Leftrightarrow t \geqslant -1$. Ainsi $S = [-1 ; +\infty[$.

Corrigé exercice 80 :

1. $e^{x+1} < 1 \Leftrightarrow e^{x+1} < e^0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. On a donc $S =]-\infty ; -1[$.
2. On a $-3e^{x^2+4} > 4 \Leftrightarrow e^{x^2+4} < -\dfrac{4}{3}$. Or, pour tout réel x, $e^{x^2+4} > 0$. Cette inéquation n'admet donc aucune solution. On a $S = \varnothing$.
3. Pour tout réel x, $e^{-2x+5} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $S = \mathbb{R}$.
4. $e^{x+4} \leqslant \dfrac{1}{e^{3x}} \Leftrightarrow e^{x+4} \leqslant e^{-3x} \Leftrightarrow x+4 \leqslant -3x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc $x \leqslant -1$. Et donc $S =]-\infty ; -1]$.

Corrigé exercice 89 :

1. On considère la fonction $g : x \mapsto e^x$. La tangente à la courbe représentative de g en $x = 0$ admet pour équation $y = g'(0)(x-0) + g(0) = xe^0 + e^0 = x+1$.
2. On obtient la figure ci-dessous.



3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow e^x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. f est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$.
4. On a $f(0) = 0$. Soit d'abord $x \leqslant 0$. Puisque f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, alors $f(x) \geqslant 0$. De la même manière, pour $x \geqslant 0$, puisque f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors $f(x) \geqslant 0$. Finalement, pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant 0$.
5. Puisque pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant 0$, on a que pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$. La courbe de la fonction exponentielle est donc toujours au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = 0$.

Corrigé exercice 91 :

1. Pour tout réel x, $h(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} = -h(x)$.
   h est donc impaire. Sa courbe représentative dans un repère admet donc l'origine comme centre de symétrie.
2. Les fonctions $x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \neq 0$. h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$$h'(x) = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$
$$h'(x) = 1 - (h(x))^2$$

Corrigé exercice 93 :

1. Graphiquement, la solution de l'équation $f(x)=6$ semble être $x=12$.
2.
   a. On a $f(0)=(a\times 0+b)\mathrm{e}^{-0.2\times 0}=b$.
   b. On a d'un côté $f(0)=7$ et de l'autre $f(0)=b$ donc $b=7$.
3.
   a. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{14.2-7}{2-0}=3.6$.
   b. Pour tout $x\in I$,
   $f'(x)=a\times \mathrm{e}^{-0.2x}-0.2(ax+7)\mathrm{e}^{-0.2x}=(-0.2ax+a-1.4)\mathrm{e}^{-0.2x}$.
   c. On sait que la droite (AB) est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x=0$, son coefficient directeur est donc égal à $f'(0)$. Ainsi, $f'(0)=a-1.4=3.6$ d'où $a=5$. On a donc $f(x)=(5x+7)\mathrm{e}^{-0.2x}$.
4.
   a. En utilisant l'expression de f' trouvée en 3.b. on obtient, pour tout $x\in I$,
   $f'(x)=(-x+3.6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
   b. Pour tout $x\in I$, $\mathrm{e}^{-0,2x}>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-x+3.6$.

x	0		3.6		25
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	7	$\nearrow$	$25\mathrm{e}^{-0.72}$	$\searrow$	$132\mathrm{e}^{-5}$

   c. Le maximum de f sur I est donc $25\mathrm{e}^{-0.72}$.

Corrigé exercice 96 :

1. La température est inférieure à 200°C au bout de 8h30 environ.
2. Pour tout $t\geqslant 0$, $f'(t)=-\dfrac{1}{5}\times 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}=-196\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}<0$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. Pour tout t, $980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}>0$ donc $980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20>20$, c'est-à-dire $f(t)>20$. La température ne peut donc être inférieur à 20°C.
4. Pour tout $t\geqslant 0$, $f'(t)+\dfrac{1}{5}f(t)=-196\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+\dfrac{1}{5}(980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20)=4$.

Corrigé exercice 97 :

Puisque la courbe passe par le point $D(0;2)$, on a $f(0)=c=2$.
Par ailleurs, $f(-2)=0=(4a-2b+2)\mathrm{e}^{-2k}$. Or puisque $\mathrm{e}^{-2k}\neq 0$, cela entraîne que $4a-2b+2=0$. De même, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}+2\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}=0$ d'où $\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}+2=0$.

$$\begin{cases}4a-2b+2=0\\ \frac{a}{4}-\frac{b}{2}+2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b+2=0\\ a-2b+8=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b+2=0\\ a=2b-8\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(2b-8)-2b+2=0\\ a=2b-8\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}6b=30\\ a=2b-8\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\ a=2\end{cases}$$

Ainsi, $f(x)=(2x^2+5x+2)\mathrm{e}^{kx}$.
Enfin, pour tout réel x, on a $f'(x)=(4x+5)\mathrm{e}^{kx}+(2x^2+5x+2)k\mathrm{e}^{kx}$. Puisque la droite (CD) est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x=0$, son coefficient directeur vaut donc $f'(0)=5+2k$. Le coefficient directeur de cette droite vaut $\dfrac{2-(-1)}{0-(-\frac{1}{2})}=6$. Ainsi, $5+2k=6$ et donc $k=\dfrac{1}{2}$. Finalement, on a donc $f(x)=(2x^2+5x+2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Corrigé exercice 100 :

1. Lorsqu'il n'y a pas de production, c'est à dire quand $x = 0$, on a $f(x) = -10$. La perte de l'entreprise est donc de 10000 euros.
2. Pour tout $x \in [0;40]$, $f'(x) = 10\mathrm{e}^{-0.1x} - 0.1 \times (10x - 10)\mathrm{e}^{-0.1x} = (11 - x)\mathrm{e}^{-0.1x}$, qui est du signe de $11 - x$. On en déduit donc le tableau de variations suivant.

x	0		11		40
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-10	$\nearrow$	$100\mathrm{e}^{-1.1}$	$\searrow$	$390\mathrm{e}^{-4}$

Le bénéfice est maximal pour $x = 11$. Il vaut alors $100\mathrm{e}^{-1.1}$ milliers d'euros, soit environ 33287 euros.

3. L'entreprise réalise du bénéfice lorsque $f(x) \geqslant 0$. Or, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (10x - 10)\mathrm{e}^{-0.1x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 10x - 10 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. L'entreprise réalise du bénéfice lorsqu'elle fabrique au moins une centaine d'objets.