

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**  
 Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

**Attention! Le sujet est recto-verso.**

**Exercice 1 2CM**

*5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 20 minutes après le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fautive.

1 pt **1** La quantité  $\frac{(e^{2x})^2}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$  peut se simplifier en :

- a.  $e^{2x}$                                       b.  $e^{4x+2}$                                       c. 1    d. 0

1 pt **2** On peut remplacer  $2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1}$  par :

- a.  $\frac{5 - 3e^x}{1 - e^x}$                                       b.  $\frac{5 + 3e^x}{1 - e^x}$                                       c.  $\frac{5 + 3e^x}{1 + e^x}$                                       d.  $\frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$

1 pt **3** On peut écrire  $(3x - 1)e^x < 0 \iff 3x - 1 < 0$  car :

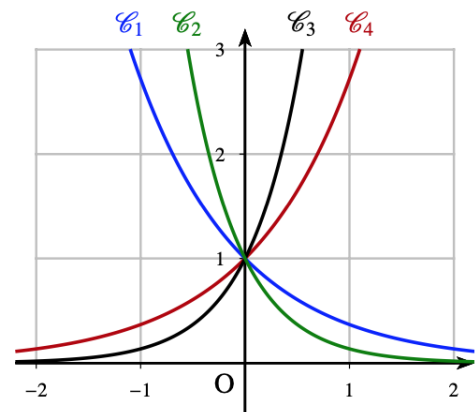
- a. La fonction exp est monotone                                      b. La fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$   
 c. La fonction exp est strictement positive sur  $\mathbb{R}$                                       d. La fonction exp est non nulle sur  $\mathbb{R}$

1 pt **4**

On a représenté quatre fonctions  $f, g, h$  et  $k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}, h(x) = e^{2x}, k(x) = e^{-2x}$$

Laquelle de ces courbes représente la fonction  $k$  ?




- a.  $\mathcal{C}_1$                                       b.  $\mathcal{C}_2$                                       c.  $\mathcal{C}_3$                                       d.  $\mathcal{C}_4$

1 pt **5** Soit  $f$  la fonction de courbe  $\mathcal{C}_f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^x$ .

La tangente à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  en  $x = 1$  a pour équation :

- a.  $y = ex + e$                                       b.  $y = 2ex - e$                                       c.  $y = 2ex + e$                                       d.  $y = ex$

 **Exercice 2 : Simplifions !**

5,75 points

5.75 pts

- 1 Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} \quad B = \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \quad C = \frac{(e^{-2x})^3 \times e^{4x}}{e^{-2x}}$$

- 2 Montrer les égalités suivantes, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

a.  $2e^{2x} + 6e^x - 8 = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$

b.  $\frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$

 **Exercice 3 : Equations et Inéquations**

5,5 points

5.5 pts Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations ou inéquations suivantes :

1  $e^{2x-3} = e^2$

2  $(5x - 7)e^{3x-1} = 0$

3  $e^{-x} - 1 \leq 0$ .

4  $(6 - 5x)e^x > 0$ .

 **Exercice 4**

5,5 points

5.5 pts Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

1  $f(x) = 7x^2 + 5x + 1 - 3e^x$

2  $g(x) = (3x + 5)e^x$

3  $h(x) = \frac{e^x + 1}{3e^x + 2}$

 **Exercice 5 : Variations**

4,25 points

4.25 pts Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0;5]$  par :  $f(x) = (4x - 1)e^{-x}$

- 1 Déterminer et factoriser  $f'(x)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .

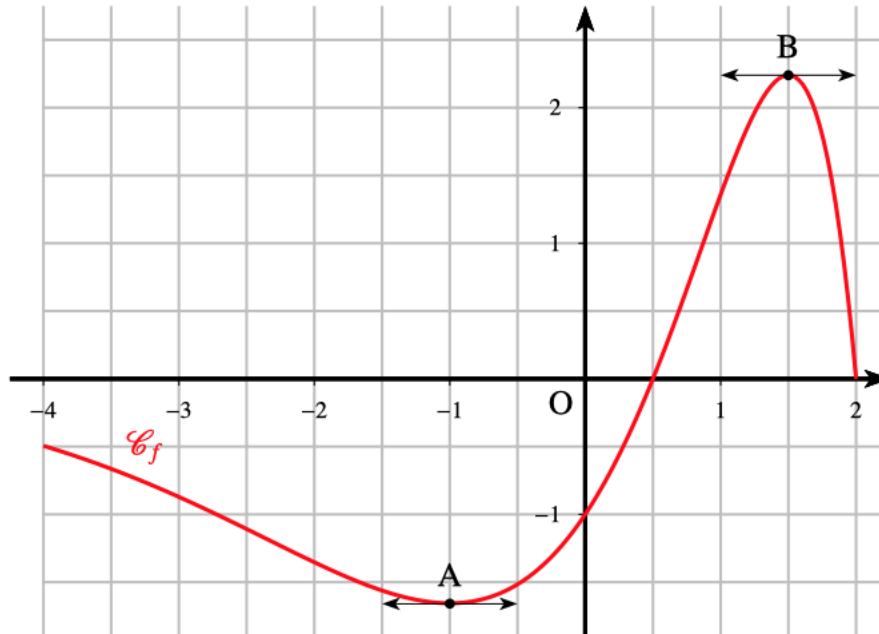
- 2 Résoudre  $f'(x) = 0$  puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0;5]$  en précisant les valeurs exactes des bornes et du maximum de  $f$ .

**Exercice 6 Représentation graphique et fonction**

8,5 points

8.5 pts

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-4; 2]$  dont on donne la courbe  $C_f$  ci-dessous.



- 1 Résoudre graphiquement  $f'(x) = 0$  et  $f'(x) \leq 0$ . Justifier.
- 2 On admet que la fonction  $f$  est définie par :  $f(x) = (-x^2 + 2,5x - 1)e^x$ .
  - a. Déterminer la fonction dérivée  $f'$ .
  - b. Étudier le signe de la fonction  $f'$  sur  $[-4; 2]$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[-4; 2]$ .
  - c. Déterminer l'équation de la tangente à  $C_f$  en  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice 7**

3 points

3 pts On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{ch} : x \mapsto \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et sinus hyperbolique la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sh} : x \mapsto \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- 1 Montrez que  $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$  puis que  $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$ .
- 2 Montrez que  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

**Exercice 8 Une modélisation**

5,25 points

5.25 pts On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (ax + b)e^{-3x}$  avec  $a$  et  $b$  deux réels.

- 1 Calculer  $f'(x)$ .
- 2 Trouver  $a$  et  $b$  sachant que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ .
- 3 Étudier les variations de  $f$ .
- 4 Déterminer l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0.

 **Exercice 9** Pour occuper celles et ceux qui vont trop vite!

3 points

4 pts Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :

$$\text{Si } a < b \quad \text{alors} \quad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

<i>Nom :</i> ..... <i>Prénom :</i> .....	<b>DS 01</b> <small>GM CASE DES MATHS</small>	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <b>TMATHS</b>  <b>OISELET</b>  <i>Devoir n° 02</i> </div> <div style="text-align: right;"> <i>Sept. 2023</i>        .../...     </div> </div>
---	--	---

Feuille de réponses de l'exercice 1 :



**A rendre au bout de 20 minutes.**

Nom , prénom :

Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse					

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**  
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

**Attention! Le sujet est recto-verso.**

**Exercice 1 2CM**

*5 points*

5 pts

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse	<b>a.</b>	<b>d.</b>	<b>c.</b>	<b>b.</b>	<b>b.</b>

**Exercice 2 : Simplifions!**

*5,75 points*

5.75 pts

**1** Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} \quad B = \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \quad C = \frac{(e^{-2x})^3 \times e^{4x}}{e^{-2x}}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} \\ &= \frac{e^2}{e^{-3}} \\ &= e^5 \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} B &= \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \\ &= e^{1+x-(x+2)} \\ &= e^{-1} \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} C &= \frac{(e^{-2x})^3 \times e^{4x}}{e^{-2x}} \\ &= \frac{e^{-6x} \times e^{4x}}{e^{-2x}} \\ &= \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}} = 1 \end{aligned} \right.$$

$A = e^5 \quad B = e^{-1} \quad C = 1$

**2** Montrer les égalités suivantes, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

**a.**  $2e^{2x} + 6e^x - 8 = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$

$$\begin{aligned} 2(e^x - 1)(e^x + 4) &= 2(e^{2x} + 4e^x - e^x - 4) \\ &= 2(e^{2x} + 3e^x - 4) \\ &= 2e^{2x} + 6e^x - 8 \end{aligned}$$

**b.**  $\frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$

$$\begin{aligned} \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} \\ &= 1 - e^{-2x} \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $2e^{2x} + 6e^x - 8 = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$  et  $\frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$

5.5 pts Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations ou inéquations suivantes :

**1**  $e^{2x-3} = e^2$

On utilise la propriété  $e^a = e^b \iff a = b$ .

$$\begin{aligned} e^{2x-3} = e^2 &\iff 2x - 3 = 2 \\ &\iff 2x = 5 \\ &\iff x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

**2**  $(5x - 7)e^{3x-1} = 0$

On est ici en présence d'un équation produit :

$$\begin{aligned} (5x - 7)e^{3x-1} = 0 &\iff 5x - 7 = 0 \text{ ou } e^{3x-1} = 0 \quad \text{R\`egle du produit nul} \\ &\iff x = \frac{7}{5} \quad \text{car la fonction exp est strictement positive.} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{5} \right\}$$

**3**  $e^{-x} - 1 \leq 0$ .

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 \leq 0 &\iff e^{-x} \leq 1 \\ &\iff e^{-x} \leq e^0 \\ &\iff -x \leq 0 \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = [0; +\infty[$$

**4**  $(6 - 5x)e^x > 0$ .

On étudie le signe de chaque facteur du produit et n fait le bilan dans un tableau de signes :

↯ Pour tout réel  $x$  on a  $e^x > 0$ .

Ainsi pour tout réel  $x$ ;  $e^x$  est strictement positif.

↯  $6 - 5x > 0 \iff -5x > -6 \iff x < \frac{6}{5}$  en divisant par  $-5 < 0$ .

↯ On dresse le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
signe de $e^x$	+	+	+
signe de $6 - 5x$	+	0	-
signe de $f(x)$	+	0	-

On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{6}{5} \right[$$

 **Exercice 4**

5,5 points

5.5 pts Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

**1**  $f(x) = 7x^2 + 5x + 1 - 3e^x$

$$f'(x) = 14x + 5 - 3e^x$$

**2**  $g(x) = (3x + 5)e^x$

$g$  est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$g = uv$ , d'où  $g' = u'v + v'u$  avec pour tout réel  $x$ , dans  $\mathbb{R}$  :  $\begin{cases} u(x) = 3x + 5 \\ v(x) = e^x \end{cases}$  ainsi :  $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

$$g'(x) = 3e^x + (3x + 5)e^x \\ = (3 + 3x + 5)e^x$$

$$g'(x) = (3x + 8)e^x$$

**3**  $h(x) = \frac{e^x + 1}{3e^x + 2}$

$h$  est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$h = \frac{u}{v}$  d'où  $h' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$  avec pour tout réel  $x$ , dans  $\mathbb{R}$  :  $\begin{cases} u(x) = e^x + 1 \\ v(x) = 3e^x + 2 \end{cases}$  ainsi :  $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = 3e^x \end{cases}$

$$h'(x) = \frac{e^x(3e^x + 2) - 3e^x(e^x + 1)}{(3e^x + 2)^2} \\ = \frac{e^x(3e^x + 2 - 3e^x - 3)}{(3e^x + 2)^2} \\ = \frac{e^x(3e^x + 2 - 3e^x - 3)}{(3e^x + 2)^2}$$

$$h'(x) = -\frac{e^x}{(3e^x + 2)^2}$$

 **Exercice 5 : Variations**

4,25 points

4.25 pts Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; 5]$  par :  $f(x) = (4x - 1)e^{-x}$

**1** Déterminer et factoriser  $f'(x)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .

$f$  est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f = uv$ , d'où  $f' = u'v + v'u$  avec pour tout réel  $x$ , dans  $\mathbb{R}$  :  $\begin{cases} u(x) = 4x - 1 \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$  ainsi :  $\begin{cases} u'(x) = 4 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$f'(x) = 4e^{-x} + (4x - 1)(-e^{-x}) \\ = e^{-x}(4 - (4x - 1)) \\ = e^{-x}(4 - 4x + 1)$$

$$f'(x) = (5 - 4x)e^{-x}$$

**2** Résoudre  $f'(x) = 0$  puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 5]$  en précisant les valeurs exactes des bornes et du maximum de  $f$ .

Tout d'abord, la fonction exponentielle étant strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , on déduit que  $f'(x)$  a le signe de  $5 - 4x$ .

$$\begin{array}{l|l} f'(x) = 0 & \iff 5 - 4x = 0 \\ & \iff -4x = -5 \\ & \iff x = \frac{5}{4} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} f'(x) > 0 & \iff 5 - 4x > 0 \\ & \iff -4x > -5 \\ & \iff x < \frac{5}{4} \end{array} \right.$$

On déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 5]$  :



$x$	0	$\frac{5}{4}$	5	
$f'(x)$		+	0	-
Variations de $f$	-1	$4e^{-\frac{5}{4}}$	$19e^{-5}$	

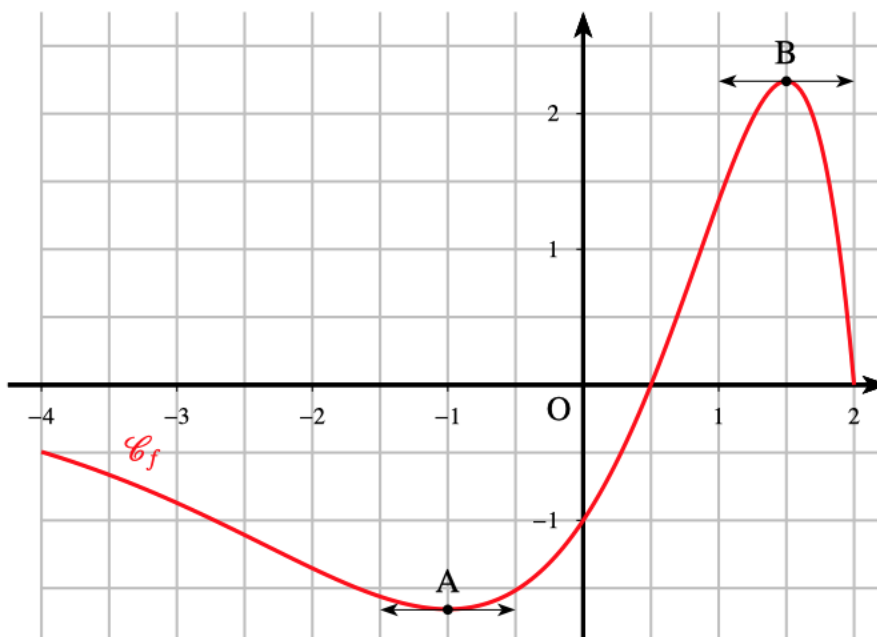
$f$  présente un maximum en  $\frac{5}{4}$  qui vaut  $4e^{-\frac{5}{4}}$ .

**Exercice 6 Représentation graphique et fonction**

8,5 points

8.5 pts

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-4; 2]$  dont on donne la courbe  $C_f$  ci-dessous.



- 1** Résoudre graphiquement  $f'(x) = 0$  et  $f'(x) \leq 0$ . Justifier.  
 Les solutions de l'équation  $f'(x) = 0$  sont les abscisses des points de  $C_f$  à tangente horizontale. On lit :

$$\mathcal{S} = \{-1; 1, 5\}$$

Comme  $f$  est décroissante sur chacun des intervalles  $[-4; -1]$  et  $[1, 5; 2]$ , on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f'(x) \leq 0$  est :

$$\mathcal{S} = [-4; -1] \cup [1, 5; 2]$$

- 2** On admet que la fonction  $f$  est définie par :  $f(x) = (-x^2 + 2,5x - 1)e^x$ .
- a. Déterminer la fonction dérivée  $f'$ .  
 $f$  est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$$f = uv, \text{ d'où } f' = u'v + v'u \text{ avec pour tout réel } x, \text{ dans } \mathbb{R} : \begin{cases} u(x) = -x^2 + 2,5x - 1 \\ v(x) = e^x \end{cases} \text{ ainsi : } \begin{cases} u'(x) = -2x + 2,5 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x + 2,5)e^x + (-x^2 + 2,5x - 1)e^x \\ &= e^x(-2x + 2,5 - x^2 + 2,5x - 1) \\ &= e^x(-x^2 + 0,5x + 1,5) \end{aligned}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 0,5x + 1,5)e^x$$

b. Étudier le signe de la fonction  $f'$  sur  $[-4; 2]$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[-4; 2]$ . Tout d'abord, la fonction exponentielle étant strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , on déduit que  $f'(x)$  a le signe de  $-x^2 + 0,5x + 1,5$ .

Ainsi  $f'(x)$  a le signe de  $-x^2 + 0,5x + 1,5$  ou de  $2(-x^2 + 0,5x + 1,5) = -2x^2 + x + 3$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left| \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-1 + 5}{-4} \quad \left| \quad = \frac{-1 - 5}{-4}$$

$$= -1 \quad \left| \quad = \frac{3}{2}$$

$-2x^2 + 5x - 2$  est un trinôme du second degré qui a pour racines  $\frac{1}{2}$  et  $2$ ; il a donc le signe de  $a = -2$  à l'extérieur des racines et celui de  $-a$  à l'intérieur.

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
signe de $-x^2 + 0,5x + 1,5$	-	0	+	0	-

On déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $[-4; 2]$ :

$x$	$-4$	$-1$	$\frac{3}{2}$	$2$
$f'(x)$	-	0	+	0
Variations de $f$	$-27e^{-4}$	$-4,5e^{-1}$	$0,5e^{1,5}$	$0$

c. Déterminer l'équation de la tangente à  $C_f$  en  $\frac{1}{2}$ .

$$T \text{ a pour équation } y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$T \text{ a pour équation } y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0, \text{ soit } y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}x - \frac{3}{4}e^{\frac{1}{2}}$$

 **Exercice 7**

3 points

3 pts On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{ch} : x \mapsto \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et sinus hyperbolique la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sh} : x \mapsto \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

**1** Montrez que  $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$  puis que  $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$ .

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}(x) + \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} + e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^x}{2} = e^x \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \text{ch}(x) - \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x} \end{aligned} \right|$$

On a bien  $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$  et  $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$

**2** Montrez que  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) \\ &= e^x \times e^{-x} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé pour tout réel  $x, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

 **Exercice 8 Une modélisation**

5,25 points

5.25 pts On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (ax + b)e^{-3x}$  avec  $a$  et  $b$  deux réels.

**1** Calculer  $f'(x)$ .  $f$  est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$$f = uv, \text{ d'où } f' = u'v + v'u \text{ avec pour tout réel } x, \text{ dans } \mathbb{R} : \begin{cases} u(x) = ax + b \\ v(x) = e^{-3x} \end{cases} \text{ ainsi : } \begin{cases} u'(x) = a \\ v'(x) = -3e^{-3x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{-3x} - 3(ax + b)e^{-3x} \\ &= (-3ax + a - 3b)e^{-3x} \end{aligned}$$

$f'(x) = (-3ax + a - 3b)e^{-3x}$

**2** Trouver  $a$  et  $b$  sachant que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} f(0) = 1 &\iff (a \times 0 + b)e^0 = 1 \\ &\iff b = 1 \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} f'(0) = 0 &\iff (-3a \times 0 + a - 3b)e^0 = 0 \\ &\iff a - 3b = 0 \\ &\iff a = 3b = 3 \end{aligned} \right|$$

$f(x) = (3x + 1)e^{-3x}$

**3** Etudier les variations de  $f$ .

↳ Dérivée :  $f'(x) = (-3ax + a - 3b)e^{-3x} = -9xe^{-3x}$

↳ Signe de la dérivée : la fonction exponentielle étant strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , on déduit que  $f'(x)$  a le signe de  $(-9x)$ .

$$\left. \begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -9x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -9x > 0 \\ &\iff x < 0 \end{aligned} \right|$$

On déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
Variations de $f$			

4 Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0.

$T$  a pour équation  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

⊗  $f'(0) = 0$

⊗  $f(0) = 1$

$T$  a pour équation  $y = 0(x - 0) + 1$ , soit  $y = 1$

**Exercice 9** Pour occuper celles et ceux qui vont trop vite!

4 points

4 pts Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :

$$\text{Si } a < b \quad \text{alors} \quad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

On démarre la preuve de cette double inégalité, en remplaçant  $b$  par une variable  $x$ , on doit donc établir que :

$$\text{Si } a < x \quad \text{alors} \quad e^a < \frac{e^x - e^a}{x - a} < e^x$$

⊗ Première étape : on prouve que Si  $a < x$  alors  $e^a < \frac{e^x - e^a}{x - a}$

Comme ici  $x > a$  on déduit  $x - a > 0$ , donc en multipliant par  $(x - a) > 0$ , on doit prouver que  $(x - a)e^a < e^x - e^a$  ou encore que si  $x > a$  alors  $(x - a)e^a + e^a < e^x$ .

Si on pose  $f(x) = e^x$ , l'équation de la tangente  $T_a$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $a$  est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ , soit  $y = (x - a)e^a + e^a$

Or la fonction exponentielle est convexe, en effet sa dérivée seconde est  $f''(x) = e^x$  qui est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

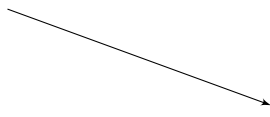
Ainsi la courbe  $C_f$  est située au dessus de sa tangente  $T_a$ , d'où l'inégalité souhaitée.

⊗ Deuxième étape : on prouve que si  $x > a$  alors  $\frac{e^x - e^a}{x - a} < e^x$ .

Comme ici  $x > a$  on déduit  $x - a > 0$ , donc en multipliant par  $(x - a) > 0$ , on doit prouver que  $e^x - e^a < (x - a)e^x$  ou encore que si  $x > a$  alors  $e^x - e^a - (x - a)e^x < 0$

On note  $\varphi : x \mapsto e^x - e^a - (x - a)e^x$

- Dérivée :  $\varphi'(x) = e^x - (1 \times e^x + (x - a)e^x) = e^x - e^x - (x - a)e^x = -(x - a)e^x$
- Tableau de variation de  $\varphi$  sur  $[a; +\infty[$  :

$x$	$a$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	-
Variations de $\varphi$	0	

Comme  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $]a; +\infty[$ , on déduit que si  $x > a$  alors  $\varphi(x) < \varphi(a)$ , soit  $\varphi(x) < 0$ , ce qui est l'inégalité souhaitée.

Les deux étapes fournissent l'encadrement demandé par l'énoncé!