A rendre avant le 17 Septembre 2024

TSpé DM1 Facultatif

Exercice 1: Simplifier les écritures suivantes :

$A = (e^x)^3 \times e^{-2x+4} \times e^{7x+1}$ $\quad$ $B = \dfrac{e^{-4x+8} \times (e^{-x})^2}{e^{3x^2-x+4}}$ $\quad$ $C = (e^{2x-1})^4 \times e^{-3x+4} \times e^{7x+2}$ $\quad$ $D = \dfrac{e^{-7x+8} \times (e^{-3x+4})^2}{e^{3x^2-x+4} \times e^x}$

Exercice 2: Résoudre dans R les équations ou inéquations suivantes :

1) $e^{3-4x} = 1$ $\quad$ 2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ $\quad$ 3) $e^{x-7} = -1$ $\quad$ 4) $e^{2x^2+3} = e^{-1}$

5) $e^{x^2} < -3$ $\quad$ 6) $(e^x)^3 \geq e^{x+6}$ $\quad$ 7) $e^x > \dfrac{1}{e^x}$ $\quad$ 8) $(e^x + 4)(e^x - 1) > 0$

Exercice 3: Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur un intervalle I :

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad$ 2) $f(x) = 5e^x - 3e^{2x}$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad$ 3) $f(x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x+3}$ $\quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = 7x - 8 + 2e^{-x}$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad$ 5) $f(x) = e^{-3x^2+7}$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad$ 6) $f(x) = (2e^x + 3)(e^x - 5)$ $\quad I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \dfrac{e^x-5}{2e^x+1}$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad$ 8) $f(x) = (7e^{-x} + 6)^2$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad$ 9) $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + \dfrac{4}{x} - 3\sqrt{x}$

$I =]0 ; +\infty[$

Exercice 4 :

f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (-3x + 4)e^x$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f sur $[-2 ; 3]$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d abscisse 0.
3. On donne $g(x) = 2x\, e^x$. On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   Etudier la position relative des deux courbes C_f et C_g sur $[-2 ; 3]$.

CORRECTION DM1

Exercice 1 : Simplifier les écritures suivantes :

$A = (e^x)^3 \times e^{-2x+4} \times e^{7x+1} = e^{3x} \times e^{5x+5} = e^{8x+5}$

$B = \dfrac{e^{-4x+8} \times (e^{-x})^2}{e^{3x^2-x+4}} = \dfrac{e^{-4x+8} \times e^{-2x}}{e^{3x^2-x+4}} = \dfrac{e^{-6x+8}}{e^{3x^2-x+4}} = e^{-3x^2-5x+4}$

$C = (e^{2x-1})^4 \times e^{-3x+4} \times e^{7x+2} = e^{8x-4} \times e^{4x+6} = e^{12x+2}$

$D = \dfrac{e^{-7x+8} \times (e^{-3x+4})^2}{e^{3x^2-x+4} \times e^x} = \dfrac{e^{-7x+8} \times e^{-6x+8}}{e^{3x^2+4}} = \dfrac{e^{-13x+16}}{e^{3x^2+4}} = e^{-3x^2-13x+12}$

Exercice 2 : Résoudre dans R les équations ou inéquations suivantes :

1) $e^{3-4x} = 1$
$e^{3-4x} = e^0$
$3 - 4x = 0$
$x = \dfrac{3}{4}$
$S = \{ \dfrac{3}{4} \}$

2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$
$2x^2 + 3 = 7x$
$2x^2 - 7x + 3 = 0$
$\Delta = 49 - 24 = 25$
$x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+5}{4} = 3$
$S = \{ \dfrac{1}{2} ; 3 \}$

3) $e^{x-7} = -1$
$S = \varnothing$

4) $e^{2x^2+3} = e^{-1}$
$2x^2 + 3 = -1$
$2x^2 = -4$
$x^2 = -2$ Or $x^2 \geq 0$ sur R
donc **$S = \varnothing$**

5) $e^{x^2} < -3$ Or $e^{x^2} > 0$ sur R
donc **$S = \varnothing$**

6) $(e^x)^3 \geq e^{x+6}$
$e^{3x} \geq e^{x+6}$
$3x \geq x + 6$
$2x \geq 6$
$x \geq 3$
$S = [3 ; +\infty [$

7) $e^x > \dfrac{1}{e^x}$
$e^x > e^{-x}$
$x > -x$
$2x > 0$
$x > 0$
$S =] 0 ; +\infty[$

8) $(e^x + 4)(e^x - 1) > 0$

$e^x + 4 \geq 0$
$e^x \geq -4$
$S = \mathbb{R}$

$e^x - 1 \geq 0$
$e^x \geq 1$
$e^x \geq e^0$
$x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signes de $e^x + 4$		+		+	
signes de $e^x - 1$		–	0	+	
signes de $(e^x + 4)(e^x - 1)$		–	0	+	

$S =] 0 ; +\infty[$

Exercice 3 :
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur les réels

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$u(x) = x^2 - 2x$ $u'(x) = 2x - 2$
$v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x$

$= (2x - 2 + x^2 - 2x)e^x$

$= (x^2 - 2)e^x$

2) $f(x) = 5e^x - 3e^{2x}$

$f'(x) = 5e^x - 3 \times 2\, e^{2x}$
$= 5e^x - 6e^{2x}$
$= e^x (5 - 6e^x)$

3) $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 3}$

$u(x) = 2e^x - 3$ $u'(x) = 2e^x$
$v(x) = e^x + 3$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = \dfrac{2e^x (e^x + 3) - (2e^x - 3)e^x}{(e^x + 3)^2}$
$= \dfrac{e^x (2e^x + 6 - 2e^x + 3)}{(e^x + 3)^2}$
$= \dfrac{9e^x}{(e^x + 3)^2}$

4) $f(x) = 7x - 8 + 2e^{-x}$
$f'(x) = 7 - 2\, e^{-x}$

5) $f(x) = e^{-3x^2+7}$
$f'(x) = -6x\, e^{-3x^2+7}$

6) $f(x) = (2e^x + 3)(e^x - 5)$

$u(x) = 2e^x + 3 \quad u'(x) = 2e^x$
$v(x) = e^x - 5 \quad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2e^x (e^x - 5) + (2e^x + 3)e^x$

$= (2e^x - 10 + 2e^x + 3)e^x$

$= (4e^x - 7)e^x$

7) $f(x)= \dfrac{e^x-5}{2e^x +1}$

$u(x) = e^x - 5 \quad u'(x) = e^x$
$v(x) = 2e^x + 1 \quad v'(x) = 2e^x$

$f'(x) = \dfrac{e^x (2e^x + 1) - (e^x - 5)(2e^x)}{(2e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{e^x (2e^x + 1 - 2e^x + 10)}{(2e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{11e^x}{(2e^x + 1)^2}$

8) $f(x) = (7e^{-x} + 6)^2$

$u(x) = 7e^{-x} + 6 \quad u'(x) = -7e^{-x}$
$f'(x) = 2 \times (-7e^{-x}) \times(7e^{-x} + 6)$

$f'(x) = -14e^{-x} \times (7e^{-x} + 6)$

9) $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + \dfrac{4}{x} - 3\sqrt{x}$

$f'(x) = 4 \times 5x^4 - 3 \times 3x^2 + 4 \times \dfrac{-1}{x^2} - 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 20 x^4 - 9 x^2 - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

Exercice 4 :

f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (- 3x + 4) e^x$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f sur les réels

$u(x) = - 3x + 4 \quad u'(x) = - 3$
$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$
$f'(x) = - 3e^x + (- 3x + 4)e^x = (- 3 - 3x + 4)e^x = (- 3x + 1)e^x$

Signe de $f'(x)$: e^x est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $- 3x + 1$.

$- 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow - 3x \geq - 1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{3}$

Tableau de variation de f : $f(\dfrac{2}{3}) = (- 3\times \dfrac{2}{3} + 4) = 2$; $f(- 2) = 10e^{-2}$; $f(3) = - 5e^3$

x	-2		$\frac{1}{3}$		3
signes de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$10e^{-2}$	$\nearrow$	$3\,e^{1/3}$	$\searrow$	$-5e^3$

2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

$y = f'(0) (x + 0) + f(0)$
$y = x + 4$

3.On donne $g(x) = 2x e^x$. On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Etudier la position relative des deux courbes C_f et C_g sur $[- 2 ; 3]$.

Pour étudier la position relative de deux courbes représentatives des fonctions f et g , il faut étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Si cette différence est positive alors $f(x) > g(x)$ donc la courbe représentative de f est au-dessus de celle de g.
Si cette différence est négative alors $f(x) < g(x)$ donc la courbe représentative de f est au-dessous de celle de g.
Si cette différence est nulle alors $f(x) = g(x)$ donc la courbe représentative de f et celle de g sont sécantes.

$f(x) - g(x) = (- 3x + 4) e^x - 2x e^x = (- 3x + 4 - 2x) e^x = (- 5x + 4) e^x$

Signe de $f(x) - g(x)$: $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $- 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow - 5x > - 4 \Leftrightarrow x < \dfrac{4}{5}$

Donc sur $[- 2 ; \dfrac{4}{5} [$ $f(x) - g(x) > 0$ donc $f(x) > g(x)$ donc C_f est au-dessus de C_g.

sur $] \dfrac{4}{5} ; 3]$ $f(x) - g(x) < 0$ donc $f(x) < g(x)$ donc C_f est au-dessous de C_g.

En $x = \dfrac{4}{5}$ C_f et C_g sont sécantes en un point A ($\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{8}{5} e^{4/5}$).