CHAPITRE 2 COMPLEMENTS SUR LA DERIVATION

I. Fonctions composées :

1) Définition :

La fonction composée de v par u, notée $v \circ u$, est définie pour tout x d'un intervalle I par ,
$v \circ u(x) = v(u(x))$.

2) Exemples :

On donne $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de $v \circ u$?

2) Déterminer l'expression de $v \circ u(x)$.

3) Quel est l'ensemble de définition de $u \circ v$?

2) Déterminer l'expression de $u \circ v(x)$.

3) Dérivation d'une fonction composée :

Si u est une fonction dérivable en a et v une fonction dérivable en u(a)
alors v ∘ u est dérivable en a et $(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a))$.

Exemple : On donne $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer $(v \circ u)'(x)$

2) Déterminer $(u \circ v)'(x)$.

Conséquences :

$(e^u)'$ = ……………………………………………..

$(u^n)'$ = ……………………………………………

En particulier : $(u^2)'$ = ……………..……. et $(u^3)'$ = …………………………

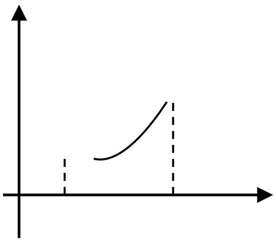
$\left(\dfrac{1}{u}\right)'$ = ……………………………………………

$(\sqrt{u})'$ = ……………………………………………

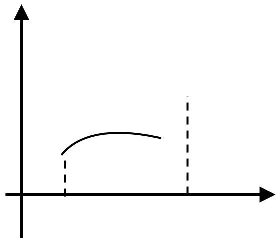
II. Convexité :

1) Introduction :

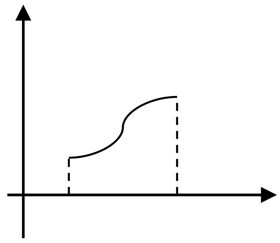
La notion de convexité va nous permettre de mieux connaitre les caractéristiques d'une courbe. En effet, si une fonction est croissante sur un intervalle [a ; b], on peut avoir plusieurs types de courbes.



Fonction convexe



Fonction concave



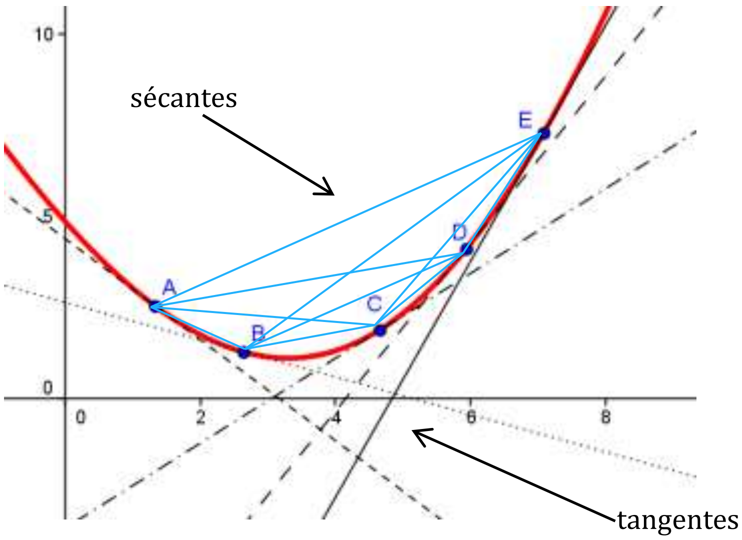
Ni l'un, ni l'autre

2) Définitions :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

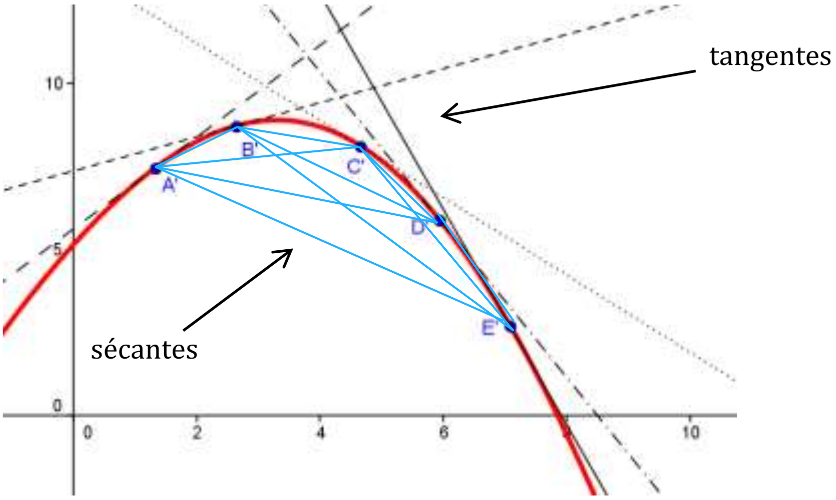
On dira que f est une fonction convexe sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située en dessous de chacune de ses sécantes (droites passant par deux points quelconques de la courbe)

On dira que f est une fonction convexe sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située au dessus de chacune de ses tangentes.



On dira que f est une fonction concave sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située au dessus de chacune de ses sécantes (droites passant par deux points quelconques de la courbe)

On dira que f est une fonction concave sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située en dessous de chacune de ses tangentes.



3) Convexité et fonction dérivée seconde :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I $\Leftrightarrow$ f' est une fonction croissante sur I.

f est concave sur I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I $\Leftrightarrow$ f' est une fonction décroissante sur I.

4) Exemples :

a) Etudier la convexité de la fonction carré : $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la convexité de la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$

c) Etudier la convexité de la fonction exponentielle : $f(x) = e^x$

d) Etudier la convexité de la fonction cube : $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

III. Utilisation de la convexité :

1) Point d'inflexion :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a $\in$ I.
Dire que A (a ; f (a)) est un point d'inflexion de la courbe représentative de f signifie que , en A , la courbe traverse sa tangente.
Conséquences : En a , la courbe passe de convexe à concave ou vice-versa.
En a, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Exemple : La fonction cube admet-elle un point d'inflexion ?

2) Inégalités de convexité :

Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Si f est une fonction concave sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Applications :

1) Etablir l'inégalité de convexité

a) pour la fonction exponentielle :

b) pour la fonction cube :

2) démontrer que $e^x \geq 1 + x$