Ch12 LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

I. La fonction cosinus :

- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x, **$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ La fonction cosinus est périodique de période 2π.**
  Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π soit par exemple sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

- Pour tout réel x, **$\cos(-x) = \cos(x)$ La fonction cosinus est paire.**
  Sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

- Valeurs remarquables de la fonction cosinus :
  Pour tout entier relatif k, **$\cos(2k\pi) = 1$; $\cos((2k+1)\pi) = -1$ et $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$**
  Il faut aussi connaître les images des nombres des " familles" $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

- Dérivée de la fonction cosinus : cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, **$\cos'(x) = -\sin(x)$**

- Tableau de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\sin(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $-\sin(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
variations de $\cos x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

- Tracé de la courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère orthogonal :

Remarque : On trace la courbe sur $[0\ ;\ \pi]$ (partie rouge)
puis on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.(partie verte)
On obtient ainsi la courbe sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ qui représente une période.
On effectue alors des translations de vecteur $2\pi \times \vec{i}$ (partie bleue) ou $-2\pi \times \vec{i}$ (partie orange)
pour obtenir une courbe plus complète.
Cette courbe est une sinusoïde.

- Dérivée de la composée $\cos(u)$: **si u est dérivable sur I, alors $\cos(u)$ est dérivable sur I et $\cos'(u) = -u' \sin(u)$**

  En particulier, lorsque u est une fonction affine $ax+b$, on a **si $f(x) = \cos(ax+b)$ alors $f'(x) = -a\sin(ax+b)$**

  Exemple : si $f(x) = \cos(2x)$ alors $f'(x) = -2\sin(2x)$

II. La fonction sinus :

- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x, $\mathbf{\sin(x+2\pi)=\sin(x)}$ **La fonction sinus est périodique de période 2π.**
  Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π soit par exemple sur l'intervalle [$-\pi$; π].

- Pour tout réel x, $\mathbf{\sin(-x)=-\sin(x)}$ **La fonction sinus est impaire.**
  Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle [0 ; π]

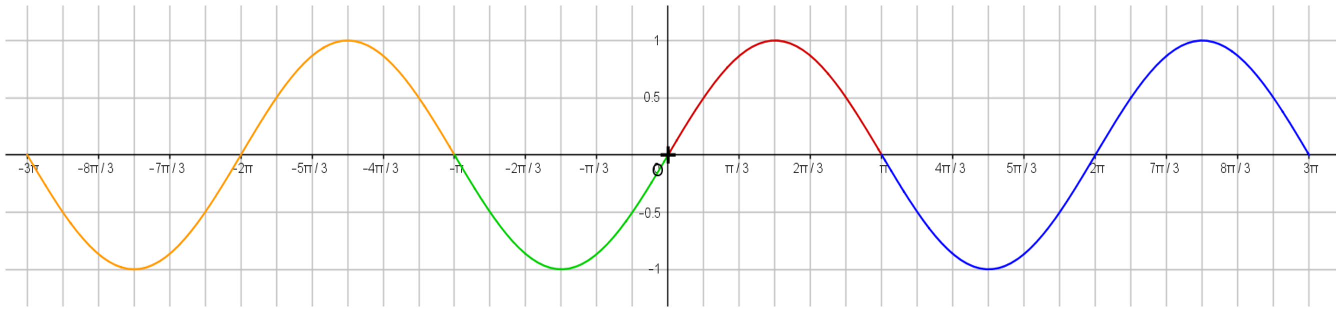
- Valeurs remarquables de la fonction sinus :
  Pour tout entier relatif k, $\mathbf{\sin(k\pi)=0}$ **;** $\mathbf{\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=1}$ **et** $\mathbf{\sin(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=-1}$
  Il faut aussi connaître les images des nombres des "familles" $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$

- Dérivée de la fonction sinus : sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathbf{\sin'(x)=\cos(x)}$

- Tableau de variation de la fonction sinus sur l'intervalle [$-\pi$; π]

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$		$-$	
variations de $\sin x$	0 ↘		-1	↗	0	↗	1	↘	0

- Tracé de la courbe représentative de la fonction sinus dans un repère orthogonal :



Remarque : On trace la courbe sur [0 ; π] (partie rouge)
puis on complète par symétrie par rapport à l'origine du repère.(partie verte)
On obtient ainsi la courbe sur [$-\pi$; π] qui représente une période.
On effectue alors des translations de vecteur $2\pi\times\vec{i}$ (partie bleue) ou $-2\pi\times\vec{i}$ (partie orange)
pour obtenir une courbe plus complète.
Cette courbe est une sinusoïde.

- Dérivée de la composée sin(u) : si u est dérivable sur I, alors sin(u) est dérivable sur I et $\mathbf{\sin'(u)=u'\cos(u)}$

  En particulier, lorsque u est une fonction affine $ax+b$, on a : **si $f(x)=\sin(ax+b)$, alors $f'(x)=a\cos(ax+b)$**

  Exemple : si $g(x)=\sin(3x-1)$ alors $g'(x)=3\cos(3x-1)$

III. Applications :

1) Etude d'une fonction comportant un sinus ou un cosinus :

Exemple 1 : $g(x) = 5\cos(2x + 1)$. Etudier la fonction g sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$

g est de la forme $\cos(ax + b)$ donc $g'(x) = 5 \times 2 \times (-\sin(2x + 1)) = -10\sin(2x + 1)$

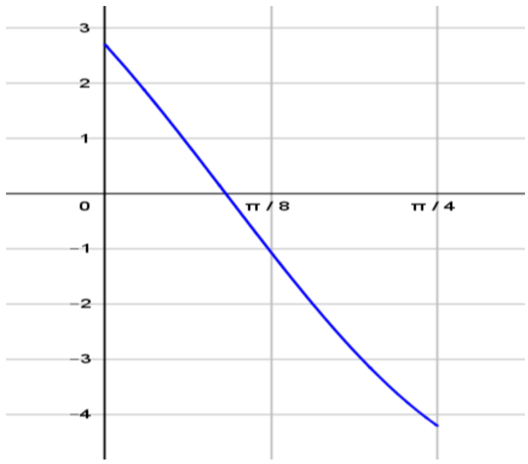
Signe de $g'(x)$:

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ donc $0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ donc $1 \leq 2x + 1 \leq \frac{\pi}{2} + 1$ donc $0 \leq 2x + 1 \leq \pi$

donc $\sin(2x + 1) \geq 0$ donc $g'(x) \leq 0$

Sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ la fonction g est strictement décroissante.

x	0		$\frac{\pi}{4}$
signe de g '(x)	0	–	0
variations de g	5cos1	↘	$5\cos(\frac{\pi}{2} + 1)$



Exemple 2 : $f(x) = \cos x \times \sin x$. Etudier la fonction f sur $[-\pi ; \pi]$.

f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$

$u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = \cos x$

$f'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

Etude du signe de f '(x) :

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x \geq \frac{1}{2}$

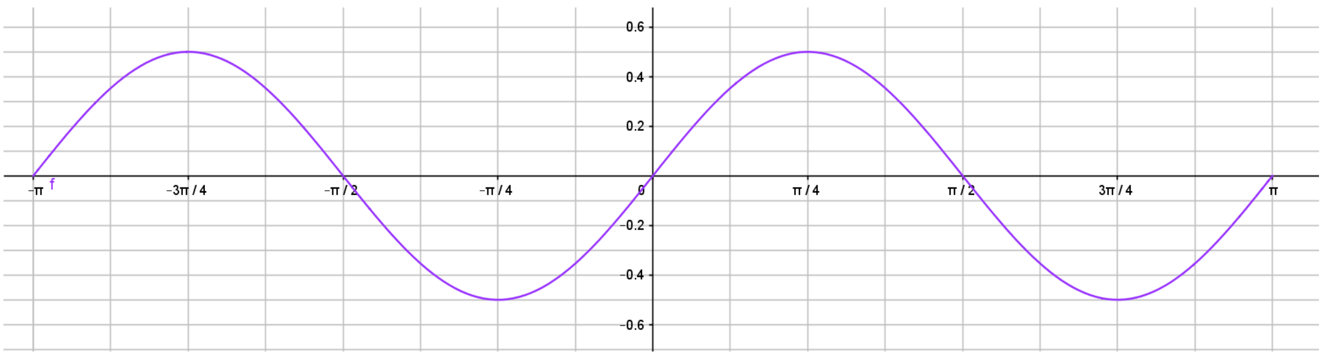
soit $\cos x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}}$ | soit $\cos x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \in [-\pi ; -\frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4} ; \pi]$ | $x \in [-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$

Tableau de variations :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
signe de f '(x)		+	0	–	0	+	0	–	0	+	
variations de f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0



2) <u>Le cas particulier de la fonction tangente</u> :

$\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} - \{ (2k+1)\times\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \}$

car $\cos x$ ne doit pas être nul.

Etudier la fonction tangente sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$.

Posons $g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \cos x$

$u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$

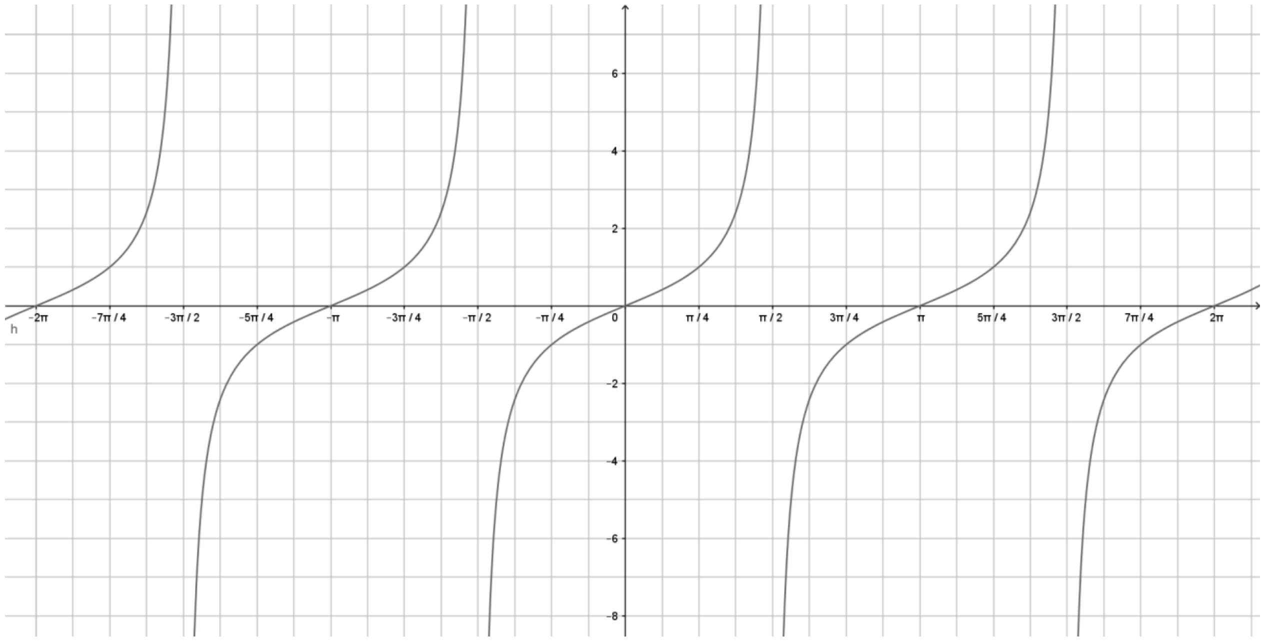
$g'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

<u>Signe de g'(x)</u> : $\cos^2 x \geq 0$ donc $g'(x)$ est positive ou nulle

donc g est strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$

La fonction tangente est strictement croissante sur tous les intervalles

$]-(2k+1)\times\dfrac{\pi}{2} ; (2k+1)\times\dfrac{\pi}{2}[$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Remarques : **La fonction tangente est périodique de période π.**

$\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = -\dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

On peut donc l'étudier et tracer sa courbe sur un intervalle de longueur π
puis effectuer des translations successives de vecteur $\pi\times\vec{i}$ ou $-\pi\times\vec{i}$.

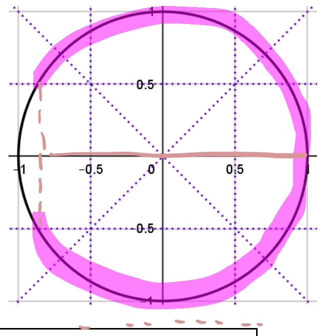
La fonction tangente est impaire $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

On aurait pu l'étudier sur un intervalle de longueur $\dfrac{\pi}{2}$ centré sur 0.

Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Etude du signe d’une expression comportant un cosinus ou résolution d'équation comportant un cosinus :

Méthode à mettre en œuvre : on isole le cosinus puis on utilise le cercle trigo



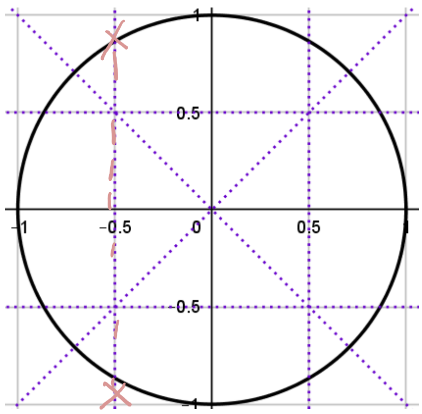
Exemple 1 : étudier le signe de $\sqrt{3} + 2\cos(x)$ sur $[-\pi ; \pi]$.

$\sqrt{3} + 2\cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'après le cercle trigonométrique, on a alors $x \in [-\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}]$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
signe de $\sqrt{3} + 2\cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple 2 : résoudre $2\cos(\pi - \frac{x}{2}) = -1$ sur $[-\pi ; \pi]$.



$2\cos(\pi - \frac{x}{2}) = -1 \Leftrightarrow \cos(\pi - \frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}$

D'après le cercle trigonométrique,

$\pi - \frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\pi - \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$-\frac{x}{2} = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

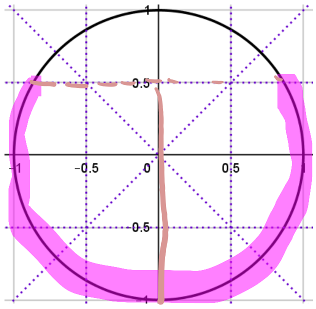
$\boldsymbol{x = \frac{10\pi}{3} - 4k\pi}$ ou $\boldsymbol{x = \frac{2\pi}{3} - 4k\pi}$ $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

Les seules solutions, dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ sont : $\frac{2\pi}{3}$ (k = 0) ; $-\frac{2\pi}{3}$ (k =1)

$\boldsymbol{S = \{-\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\}}$

4) Etude du signe d'une expression comportant un sinus ou résolution d'équation comportant un sinus :

Méthode à mettre en œuvre : on isole le sinus puis on utilise le cercle trigo



Exemple 3 : étudier le signe de $1 - 2\sin(2x)$ sur $[0 ; \pi]$.

$1 - 2\sin(2x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin(2x) \leq \frac{1}{2}$

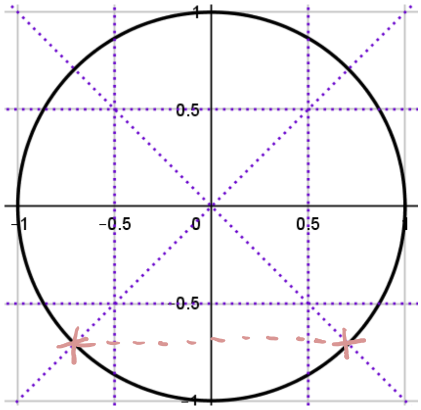
D'après le cercle trigonométrique,

$0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leq 2x \leq 2\pi$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}$ ou $\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \pi$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
signe de $1 - 2\sin(2x)$		+	0	–	0	+	

Exemple 4 : résoudre $\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$ sur $[0 ; \pi]$.



$\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -1 \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $x \in [0 ; \pi]$ alors $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{13\pi}{6}]$

D'après le cercle trigonométrique,

$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$2x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$

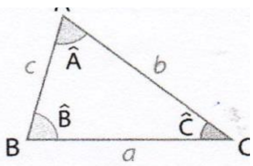
$x = \frac{13\pi}{24} + k\pi$ ou $x = \frac{19\pi}{24} + k\pi$

Les seules solutions, dans l'intervalle $[0; \pi]$ sont : $\frac{13\pi}{24}$ et $\frac{19\pi}{24}$ (k = 0)

$$\mathbf{S = \left\{ \frac{13\pi}{24} ; \frac{19\pi}{24} \right\}}$$

5)Relations métriques dans un triangle

THÉORÈME D'AL-KASHI Dans un triangle ABC, avec les notations ci-contre :



(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

Démonstration :

$a^2 = BC^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,\vec{BA}\cdot\vec{AC} = b^2 + c^2 - 2\,\vec{AB}\cdot\vec{AC} = b^2 + c^2 - 2\,\vec{AH}\cdot\vec{AC}$

avec H projeté orthogonal de B sur (AC).

Or dans le triangle AHB rectangle en H , $\cos\hat{A} = \frac{AH}{AB}$ donc $AH = AB\cos\hat{A}$

Donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times AH \times AC$ (vecteurs colinéaires de même sens)

$= b^2 + c^2 - 2\,AB\cos\hat{A} \times AC$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

De même pour les autres formules.

PROPRIÉTÉ DE L'AIRE D'UN TRIANGLE Dans un triangle ABC d'aire S :

(1) $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$ (2) $S = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B}$ (3) $S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$

Démonstration :

Dans le triangle AHB rectangle en H , $\sin \widehat{A} = \frac{BH}{AB}$ donc $BH = AB \sin \widehat{A}$

$S = \frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BH \times AC}{2} = \frac{1}{2} \times AC \times AB \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$

De même avec les autres hauteurs.

FORMULE DES SINUS Dans un triangle ABC, $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$

Démonstration :

$\frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} \Leftrightarrow b \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{B}$ (car $c \neq 0$) $\Leftrightarrow b = a \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}} \Leftrightarrow \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}}$ (car $\sin \widehat{A} \neq 0$ et $\sin \widehat{B} \neq 0$)

6) Formules d'addition et de duplication

a) Formules d'addition

PROPRIÉTÉS Pour tous nombres réels a et b,

(1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(4) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

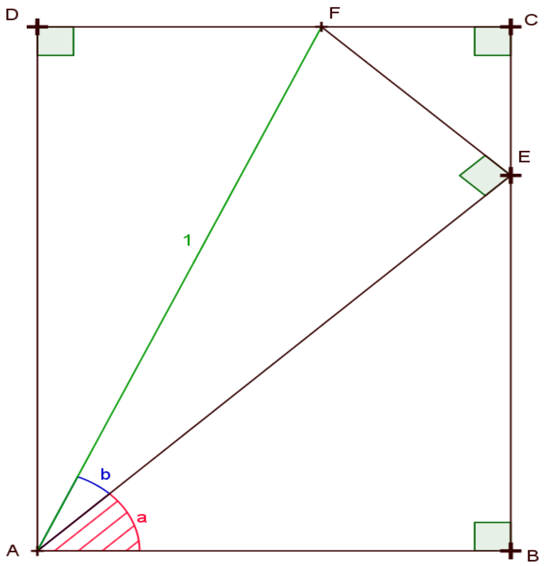
b) Formules de duplication

PROPRIÉTÉS Pour tout nombre réel a,

(1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

(2) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Démonstration :



Dans le rectangle ABCD, on a :

- Un triangle ABC, rectangle en B, tel que $E \in [BC]$.
  On note a la mesure de l'angle $\widehat{BAE}$.
- Un triangle AEF, rectangle en E, tel que $F \in [DC]$.
  On note b la mesure de l'angle $\widehat{EAF}$ et 1 la mesure du segment [AF].

1) Déterminer, en fonction de a, les mesures des angles $\widehat{BEA}$, $\widehat{CEF}$ et $\widehat{CFE}$.
La somme des mesures des angles d'un triangle fait 90° donc

dans le triangle ABE , $\mathbf{\widehat{BEA} = 90 - a}$ **.**

L'angle $\widehat{BEC}$ est un angle plat, il mesure 180° donc

$\widehat{\mathbf{CEF}}$ = 180 – (90 – a + 90) = **a**

dans le triangle CEF, $\mathbf{\widehat{CFE} = 90 - a}$**.**

2) Déterminer, en fonction de a et b, celle de $\widehat{AFD}$.

L'angle $\widehat{BAD}$ est droit donc $\widehat{FAD} = 90 - (a + b) = 90 - a - b$

Dans le triangle FAD, $\widehat{\mathbf{AFD}} = 90 - (90 - a - b) = \mathbf{a + b}$

3) En utilisant la trigonométrie dans le triangle rectangle, déterminer, en fonction de a et b, les longueurs :

a) AE et EF.

Dans le triangle AEF, rectangle en E, d'après la trigonométrie, on a :

$\mathbf{\cos b} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AE}{1} \mathbf{= AE}$ et $\mathbf{\sin b} = \dfrac{EF}{AF} = \mathbf{EF}$

b) AB et BE

Dans le triangle ABE, rectangle en B, d'après la trigonométrie, on a :

$\cos a = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{\cos b}$ donc $\mathbf{AB = \cos a \times \cos b}$ et $\sin a = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{BE}{\cos b}$ donc $\mathbf{BE = \sin a \times \cos b}$

c) CE et CF

Dans le triangle ECF, rectangle en C, d'après la trigonométrie, on a :

$\cos a = \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{EC}{\sin b}$ donc $\mathbf{EC = \cos a \times \sin b}$ et $\sin a = \dfrac{CF}{EF} = \dfrac{CF}{\sin b}$ donc $\mathbf{CF = \sin a \times \sin b}$

d) FD et AD.

Dans le triangle DAF, rectangle en D, d'après la trigonométrie, on a :

$\mathbf{\cos (a + b)} = \dfrac{FD}{FA} \mathbf{= FD}$ et $\mathbf{\sin (a + b)} = \dfrac{AD}{AF} \mathbf{= AD}$

4) a) En déduire les formules de cos(a + b) et sin(a + b).

Le quadrilatère ABCD est un rectangle donc

AB = DC donc $\cos a \times \cos b = \cos (a + b) + \sin a \times \sin b$ donc $\mathbf{\cos (a + b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b}$

et BC = AD donc $\mathbf{\sin (a + b) = \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a}$

b) En remplaçant b par – b, en déduire les formules de cos(a – b) et sin(a – b).

$\mathbf{\cos (a - b)} = \cos a \times \cos (- b) - \sin a \times \sin (- b) = \mathbf{\cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b}$

$\mathbf{\sin (a - b)} = \sin a \times \cos (- b) + \sin (- b) \times \cos a \mathbf{= \sin a \times \cos b - \sin b \times \cos a}$

c) En remplaçant b par a , en déduire les formules de cos(2a) et sin(2a).

$\cos (a + a) = \mathbf{\cos (2a)} = \cos a \times \cos a - \sin a \times \sin a = \mathbf{\cos^2 a - \sin^2 a} = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = \mathbf{2 \cos^2 a - 1}$

$= 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = \mathbf{1 - 2 \sin^2 a}$

$\sin (a + a) = \mathbf{\sin (2a)} = \sin a \times \cos a + \sin a \times \cos a = \mathbf{2 \sin a \cos a}$