CHAPITRE 13 COMBINATOIRE ET DENOMBREMENT

I. Cardinal d'un ensemble :

1) Définition du cardinal d'un ensemble fini :

Soit A un ensemble fini.

Le cardinal de A, noté Card (A) est le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Exemple : A = { 1 ; 2 ; 6 ; 9 ; 11 } donc Card(A) = 5

2) Vocabulaire :

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont dans A ou dans B. On la note A $\cup$ B.
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On la note A $\cap$ B.
Deux ensembles sont dits disjoints si leur intersection est vide. A et B disjoints $\Leftrightarrow$ A $\cap$ B = $\varnothing$

Exemple : A={ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 } B={ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 } C={ 20 ; 30 }

A $\cup$ B = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 } A $\cap$ B ={ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 }
A $\cup$ C = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 20 ; 30 } A $\cap$ C = $\varnothing$
A et C sont disjoints.

3) Propriété admise :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints.

Alors : $\mathbf{Card}\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n) = Card(A_1) + Card(A_2) + \cdots . + Card(A_n) = \sum_{k=1}^{n} Card(A_k)$

4) Produit cartésien de deux ensembles :

Soit A et B deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de A et de B, noté $A \times B$ (se lit « A croix B »), est l'ensemble constitué des couples $(x\,;y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.

$$A \times B = \{(x; y), x \in A, y \in B\}$$

Exemple :

A= {1 ; 2} et B= {3 ; 4} on a : $A \times B = \{(1;3)\,;\,(1;4)\,;\,(2;3)\,;\,(2;4)\,\}$

ATTENTION ! Dans un couple , l'ordre est important !

(1 ; 2) n'est pas le même élément que (2 ; 1).

Propriété :

Soit A et B deux ensembles finis. Alors : $\text{Card}\,(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

Démonstration : (ex 68 p 47)

1. Si A ou B est vide, leur cardinal vaut 0 et le produit $A \times B$ est également vide, de cardinal 0 également. La formule reste valable.

2. Si A = $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ *et* $B = \{b_1; b_2; \dots; b_p\}$ et *pour i entier naturel*, $i \leq p, A_i = A \times \{b_i\}$
   a. Les éléments de A_i sont les couples (a_k ; b_i) pour k allant de 1 à *n.*
      Il y a donc n éléments dans chaque A_i.
   b. Les ensembles A_i sont deux à deux disjoints.
      En effet, le deuxième élément d'un couple diffère d'un ensemble A_i à un autre.
   c. L'union des A_i pour i allant de 1 à p est $A \times B$.
      Cette union est une union d'ensembles disjoints donc on a :
      $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_p) = n + \dots + n = np$

Définition :

Soit A un ensemble et n un entier naturel non nul.

On appelle *n*-uplet de A un élément de $A^n = A \times A \times \dots \times A$, ($A$ est n fois)

Propriété :

Soit A un ensemble fini et n un entier naturel non nul. Alors $\text{Card}\,(A^n) = (\text{Card}(A))^n$

Démonstration : Démonstration par récurrence ex 69 p 47.

Application :

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code est formé de 4,5 ou 6 chiffres de 0 à 9

et d'une lettre parmi les 3 lettres A, B ou C. Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Réponse : Appelons A_4, A_5, A_6 l'ensemble des codes comportant 4 , 5 ou 6 chiffres. On a:

$\text{Card}(A_4) = Card(\{0 ; 1 \dots ; 9\}^4 \times \{A ; B ; C\}) = 10^4 \times 3 = 30\,000$

$\text{Card}(A_5) = Card(\{0; 1 \dots; 9\}^5 \times \{A; B; C\}) = 10^5 \times 3 = 300\,000$

$\text{Card}(A_6) = Card(\{0; 1 \dots; 9\}^6 \times \{A; B; C\}) = 10^6 \times 3 = 3\,000\,000$

soit au total : 3 330 000 codes possibles.

II. Arrangements et permutations :

1) Définition d'une factorielle :

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle de n le nombre : $n\,! = \; n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$

Par convention, 0 !=1

Exemple : 5 ! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

2) Définition d'un arrangement :

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Un arrangement de k éléments de A (ou k-arrangement de A)

est un k-uplet d'éléments distincts de A.

Exemple :

Si A {1 ;2 ;3 ;4} alors (1 ; 3 ; 4) et (1 ; 4 ; 3) sont deux 3–uplets de A.

Ce sont deux 3–arrangements de A.

3) Propriété :

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Le nombre de k-arrangements de A est égal à : $\boldsymbol{A_n^k = n \times (n-1) \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Démonstration :

Pour construire un k-uplet d'éléments de A, on a n choix pour le premier élément, (n-1) choix pour le second, ……, (n – k + 1) choix pour le kè. Ainsi le nombre de k-arrangements de A est égal à :

$$n \times (n-1) \dots \times (n-k+1) = \frac{n \times (n-1) \dots \times (n-k+1) \times \dots \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4) Définition d'une permutation :

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments.

Une permutation de A est un n-uplet d'éléments distincts de A.

Une permutation de A est en fait un n–arrangement de A.

Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est n !

$\boldsymbol{A_n^n = n \times (n-1) \dots \times (n-n+1) = n\,!}$

Exemple :

Si A= {1 ; 2 ; 3} les permutations de A sont:

(1 ; 2 ; 3) ; (1 ; 3 ; 2) ; (2 ; 1 ; 3) ; (2 ; 3 ; 1) ; (3 ; 1 ; 2) et (3 ; 2 ; 1).

Il y a 3 ! = 3 × 2 = 6.

Application :

Dans une classe 5 élèves doivent passer un oral. De combien de façon peut on organiser ces oraux , chaque élève étant interrogé une seule fois ?

Combien y-a-t-il de possibilités si le professeur n'a le temps d'interroger que 3 d'entre eux ?

Solution

On assimile l'ordre de passage à un **tirage avec ordre et sans remise** parmi les 5 élèves :

On a donc une **permutation** de 5 élèves.

Le nombre de possibilités est donc de : $5\,! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = \mathbf{120}$

Pour les 3 élèves, on a un 3-arrangement : $\frac{5!}{(5-3)!} = 5\times 4\times 3 = \mathbf{60}$

III. Combinaisons d'un ensemble fini :

1) Définition:

Une partie d'un ensemble A est un sous ensemble de A.

Tous les éléments d'une partie de A sont des éléments distincts de A.

Exemple

Si A=$\{1;2;3\}$ alors $\{1;3\}$; $\{3\}$; $\{2;3\}$ et $\emptyset$ sont des parties de A.

2) Propriété:

Soit A un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de A est égal à 2^n.

Démonstration :

Pour constituer une partie de A, il y a deux choix pour chaque élément de A :

Le mettre ou pas dans cette partie.

Puisque que A possède n éléments, cela donne 2^n parties possibles.

Il y a ainsi autant de parties de A que de n-uplet de $\{0;1\}$, soit 2^n.

3) Définition d'une combinaison:

Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$. Il se lit " k parmi n ".

C'est un coefficient binomial.

4) Propriétés des coefficients binomiaux:

Soit n et k deux entiers naturels tel que $k \leq n$. Alors :

1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad et \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) Relation de Pascal : Si $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

3) De plus $\binom{n}{0} = 1$. Si $n \geq 1, \binom{n}{1} = n \quad et \quad si\; n \geq 2,\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Démonstrations : ex 94 p 50 et ex 105 p 51

1)Démonstration du 1) partie 1

Le nombre de k–uplets de A est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ et le nombre de permutations de k éléments est k!

Donc le nombre de parties de k éléments de A est $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Donc $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Démonstration du 1) partie 2

1. L'ensemble $A \setminus X$ possède $n-k$ éléments.
2. À chaque partie à k éléments de l'ensemble A, on peut associer de manière univoque une partie à $n-k$ éléments de l'ensemble A. Ainsi, le cardinal de l'ensemble des combinaisons à k éléments de A est égal au cardinal de l'ensemble des combinaisons à $n-k$ éléments de A, c'est-à-dire $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2)Démonstration de la relation de Pascal :

1. Il existe $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments de A.
2. L'élément a étant fixé et appartenant à la combinaison considérée, il faut encore choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ restants : il y a $\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons possibles.
3. Si l'élément a n'appartient pas à la combinaison, il faut choisir k éléments parmi les $n-1$ restants, soit $\binom{n-1}{k}$ possibilités.
4. Notons A_a l'ensemble des combinaisons à k éléments de A contenant l'élément a et $\overline{A_a}$ l'ensemble des combinaisons à k éléments de A ne contenant pas l'élément a. Ces ensembles sont évidemment disjoints et leur union vaut l'ensemble des combinaisons à k éléments de A.
   Ainsi, $\binom{n}{k} = \mathrm{Card}(A_a \cup \overline{A_a}) = \mathrm{Card}(A_a) + \mathrm{card}(\overline{A_a}) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

5. En procédant méthodiquement, on obtient le calcul ci-après :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{k}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{n-k}{n-k} \times \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= k \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} + (n-k) \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

3)Démonstrations :

$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$ $\quad$ $Pour\ n \geq 1, \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$ $\quad$ $Pour\ n \geq 2, \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

5) Application : Le triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Remarque : Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a et b, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

Propriété :

Soit n un entier naturel. Alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration :

Soit A un ensemble fini à n éléments.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A composées de k éléments. On a ainsi $\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$

Les A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion forme l'ensemble des parties de A.

Ainsi $2^n = \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n) = \sum_{k=0}^{n} Card\,(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(On pourrait aussi faire une démonstration par récurrence)

Application :

Dans une grille comportant des nombres de 0 à 9 et les lettres de A à F, il faut choisir 3 nombres et 2 lettres.

Combien de grilles différentes existe-t-il ?

Solution :

Pour les nombres, il existe $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = 120$ combinaisons possibles.

Pour les lettres, il existe $\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = 15$ combinaisons possibles.

Au total, il y a donc $120 \times 15 = 1800$ grilles possibles.