VARIABLES ALEATOIRES

I. Rappels sur les probabilités :

1) Probabilité d'un événement :

Un événement est un ensemble de résultats possibles d'une expérience aléatoire.
La probabilité de l'événement A se calcule avec la formule

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

2) Probabilité de l' événement contraire :

On notera $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

3) Probabilité de la réunion de deux événements :

On appelle réunion de A et B et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui sont soit dans A soit dans B soit dans les deux.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

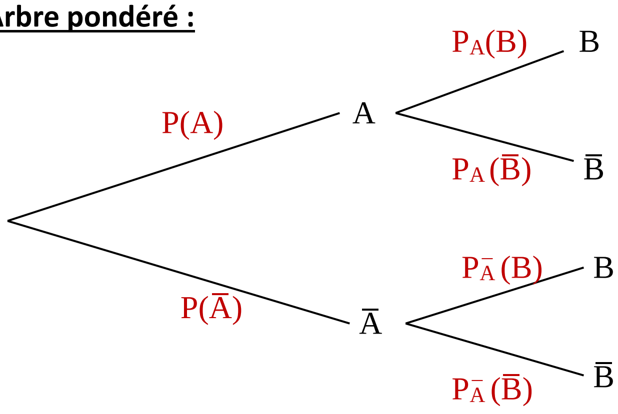
4) Arbres de probabilités :

a) Règles de construction d'un arbre pondéré :

Dans un arbre :

- **la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même point vaut 1.**
- **la probabilité d'un événement est égale au produit des probabilités portées par les branches qui aboutissent à cet événement.**

2) Arbre pondéré :



$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

$P(\overline{B}) = P(\overline{B} \cap A) + P(\overline{B} \cap \overline{A})$

II. Les variables aléatoires discrètes :

1) Exemple :

On lance deux dés équilibrés, dont les faces portent les nombres de 1 à 6.
On note les résultats obtenus et on les additionne.
On note ***X*** la variable qui sera égale à la somme obtenue.

a) Déterminer tous les résultats possibles pour X.
(on présentera les résultats dans un tableau à double-entrée).

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On voit qu'il y a 36 cas possibles.

Toutes les issues ne sont pas équiprobables.
On obtient en effet plus souvent le 6 que le 3.

L'ensemble de toutes les valeurs de ***X***, est : { 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 }

b) Calculer $P(X = 2) = \frac{1}{36}$ $\qquad P(X = 3) = \frac{2}{36}$ $\qquad P(X = 6) = \frac{5}{36}$

On regroupe tous les résultats dans un tableau :

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	TOTAL
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

On dit alors que l'on a définit **la loi de probabilité** de **la variable aléatoire X**.

c) Calculer la moyenne pondérée des valeurs de X.

Cette moyenne se note E(*X*) et s'appelle l'espérance de X.

$$E(X) = \frac{1}{36}\times 2 + \frac{2}{36}\times 3 + \frac{3}{36}\times 4 + \frac{4}{36}\times 5 + \frac{5}{36}\times 6 + \frac{6}{36}\times 7 + \frac{5}{36}\times 8 + \frac{4}{36}\times 9 + \frac{3}{36}\times 10 + \frac{2}{36}\times 11 + \frac{1}{36}\times 12$$

$E(X) = 7$

7 est la valeur que l'on pourra espérer pour ***X*** si l'on joue très longtemps.

2) Définitions :

Lors d'une expérience aléatoire, on obtient un certain nombre d'issues.

Lorsqu'à chaque issue, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Cette variable aléatoire est en général notée X.

Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire *X*, c'est calculer, pour chaque valeur possible de *X*, la probabilité de l'obtenir.

On regroupera les résultats dans un tableau de ce type :

$X = x_i$	x_1	x_2	…	…	…	x_n	TOTAL
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…	…	…	$P(X = x_n)$	1

L'espérance de la variable aléatoire ***X*** est notée E(***X***) et elle vaut :

$$E(X) = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + ... + P(X = x_n) \times x_n$$

Elle représente la moyenne pondérée des valeurs de la variable aléatoire X.

Elle représente la valeur que l'on espérera obtenir pour *X* après un très grand nombre d'expériences.

III. Loi de Bernoulli :

1) Définition:

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire qui n'a que deux issues,
le succès noté S et l'échec noté $\overline{S}$.

Si l'on reproduit plusieurs fois, de manières identiques et indépendantes, la même épreuve de Bernoulli, on représente la situation par **un arbre de probabilités** et on calculera les probabilités demandées grâce à l'arbre.

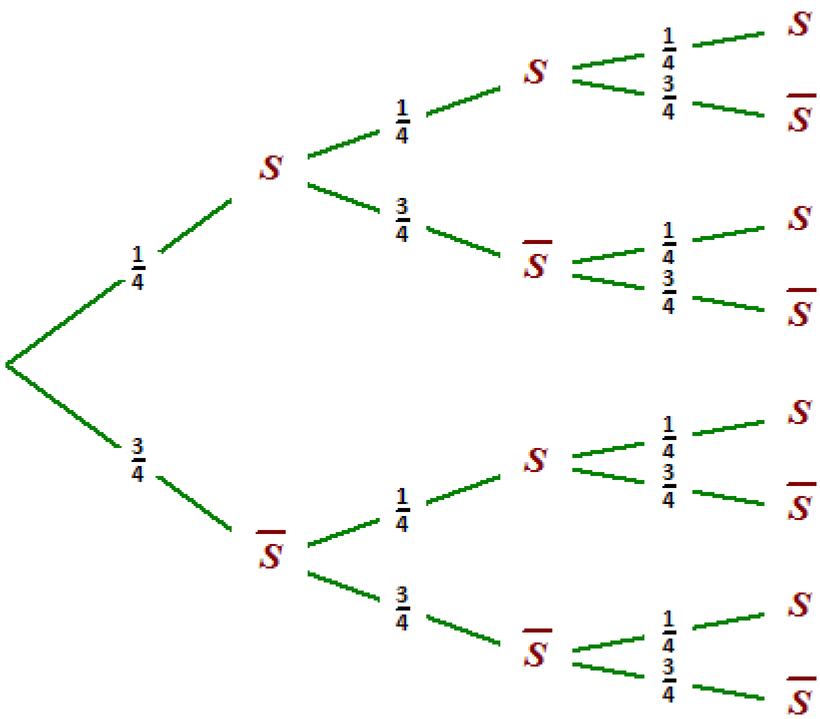
2) Exemple:

Un exercice se présente sous la forme d'un QCM comportant 3 questions.
Pour chaque question, il y a 4 réponses proposées. 1 seule est exacte.
On notera S l'événement " l'élève coche la bonne réponse ".

a) Calculer P(S).

$P(S) = \frac{1}{4}$ donc $P(\overline{S}) = \frac{3}{4}$

b) Illustrer la situation par un arbre de probabilités.



c) Si un élève répond au hasard à toutes les questions, quelle est la probabilité qu'il ait :

aucune bonne réponse :

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ La probabilité de n'avoir aucune bonne réponse est $\frac{27}{64}$.

une seule bonne réponse :

$\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times 3 = \frac{9}{64} \times 3 = \frac{27}{64}$ La probabilité d'avoir une bonne réponse est $\frac{27}{64}$.

deux bonnes réponses :

$\left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times 3 = \frac{3}{64} \times 3 = \frac{9}{64}$ La probabilité d'avoir deux bonnes réponses est $\frac{9}{64}$.

trois bonnes réponses :

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ La probabilité d'avoir trois bonnes réponses est $\frac{1}{64}$.