CHAPITRE 9 POURCENTAGES ET TAUX D'EVOLUTION

I. PROPORTIONS ou POURCENTAGES :

1) Exemple :

Dans un lycée, il y a 368 filles et 450 garçons.
On voudrait connaitre le pourcentage de filles et de garçons dans ce lycée.

Pour connaitre la proportion de filles dans l'établissement, il faut d'abord calculer le nombre total d'élèves du lycée. 368 + 450 = 813. Il y a 813 élèves dans ce lycée.

La proportion de filles est donc $\frac{368}{813} \approx 0{,}45$.

Pour que ce soit plus facile à interpréter, on transforme ce nombre en pourcentage en multipliant par 100. On dira donc qu'il y a 45% de filles dans cet établissement.
Pour trouver le pourcentage de garçons, on peut procéder de la même manière ou dire que le total représente 100% donc le pourcentage de garçons est donné par 100 – 45 = 55. Il y a 55% de garçons dans cet établissement.

2) Définition :

Une proportion ou fréquence est le quotient entre le nombre d'éléments de la partie qui nous intéresse et le nombre total d'éléments. C'est un nombre décimal compris entre 0 et 1 ou un pourcentage compris entre 0% et 100%.

3) Remarque :

Pour calculer p % d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{p}{100}$.

Calculer 20% de 350€.

On multiplie 350 par $\frac{20}{100}$.

$350 \times \frac{20}{100} = \frac{350 \times 20}{100} = 70$. *70€ représentent les 20% de 350€.*

II. POURCENTAGES DE POURCENTAGES :

1) Exemple :

Dans une jardinerie, 83% des achats de sapins de Noël sont des sapins naturels.
Parmi ces sapins naturels achetés, 72% sont des Nordmann.
Quel est le pourcentage de sapins Nordmann dans les achats de sapins de Noël ?

Pour connaitre la proportion de Nordmann parmi tous les sapins achetés pour Noël, il faut calculer les 72% des 83% soit $\frac{72}{100} \times \frac{83}{100} = 0{,}72 \times 0{,}83 = 0{,}5976$.

En multipliant par 100, on obtient 59,79% des sapins vendus pour Noël sont des Nordmann.

2) Définition :

Si p_B est la proportion d'une population B dans une population A
Si p_C est la proportion d'une population C dans une population B
Alors $p_B \times p_C$ sera la proportion de la population C dans la population A.

II. EVOLUTIONS :

1) Exemple :

Un article coûtait 54€ en Janvier 2019.

a) On a décidé, en Juin, de l'augmenter de 20%. Quel est alors son nouveau prix ?

On calcule 20% de 54€ puis on les rajoute à 54€.

$54 + 54 \times \frac{20}{100} = 54 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 54 \times 1{,}2 = 64{,}80$

L'article coûtait donc 64,80€ en Juin 2019.

Remarque : Augmenter 54€ de 20% c'est multiplier 54 par 1,2 $\left(1 + \frac{20}{100}\right)$

1,2 est le coefficient multiplicateur. CM = 1,2.

b) Voyant que l'article se vendait moins bien, on a décidé, un mois plus tard, de diminuer son prix de 20%. Quel est alors son nouveau prix ?

On calcule 20% de 64,80€ puis on les enlève de 64,80€.

$64{,}80 - 64{,}80 \times \frac{20}{100} = 64{,}80 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 64{,}80 \times 0{,}8 = 51{,}84$

L'article coûtait donc 51,84€ en Juillet 2019.

Remarque : Diminuer 64,80€ de 20% c'est multiplier 64,80 par 0,8 $\left(1 - \frac{20}{100}\right)$.

0,8 est le coefficient multiplicateur. CM = 0,8.

c) Si on compare ce dernier prix au prix de Janvier 2019,

on observe une baisse de $51{,}84 - 54 = -2{,}16$€ . *– 2,16 est la variation absolue du prix.*

A quel pourcentage cette baisse correspond-t-elle ?

$\dfrac{-2{,}16}{54} \times 100 = -4$ Le prix de Janvier a donc baissé de 4%.

Remarque : Si on appelle VD la valeur de départ (VD = 54)
et VA la valeur d'arrivée (VA = 51,84) ,
le taux d'évolution $t = -4\%$ est obtenu en calculant $\dfrac{VA - VD}{VD} \times 100$

2) Définition :

Une quantité évolue d'une valeur de départ ou valeur initiale VD vers une valeur d'arrivée ou valeur finale VA.
La différence VA – VD est la variation absolue de la valeur.
Le taux d'évolution *t* de VD à VA est le quotient $t = \dfrac{VA - VD}{VD}$.

3) Remarques :

Le taux d'évolution peut être un nombre décimal positif ou négatif.
Si *t* est négatif, il s'agit d'une diminution.
Si *t* est positif, il s'agit d'une augmentation.
Le taux d'évolution va souvent s'exprimer en pourcentage. Il pourra alors dépasser 100%.

4) Appliquer un taux d'évolution :

Faire subir à une quantité une évolution de taux *t* , c'est multiplier cette quantité par le coefficient multiplicateur (1 + *t*).

Augmenter de *x*% une quantité, c'est multiplier cette quantité par le CM égal à $1 + \dfrac{x}{100}$.

Diminuer de *x*% une quantité, c'est multiplier cette quantité par le CM égal à $1 - \dfrac{x}{100}$.

Remarque : Si le CM est inférieur à 1, on a une baisse.
Si le CM est supérieur à 1, on a une hausse.
Pour retrouver le taux d'évolution on calcule (CM – 1) × 100.

5) Evolutions successives :

Reprenons l'exemple précédent.
De quel pourcentage le prix de départ 54€ a-t-il diminué pour arriver à 51,84€ ?

$$\begin{tikzcd} P_1 = 54 \arrow[r, bend left, "\times\ 1{,}2"] \arrow[rr, bend right, "\times\ 1{,}2 \times 0{,}8"'] & P_2 = 64{,}80 \arrow[r, bend left, "\times\ 0{,}8"] & P_3 = 51{,}84 \end{tikzcd}$$

Le CM global est égal à $1{,}2 \times 0{,}8$ donc $CM = 0{,}96 = CM_1 \times CM_2$

Le CM global est inférieur à 1 donc c'est une baisse. $1 - 0{,}96 = -4$. C'est une baisse de 4%.

Pour calculer le CM global correspondant à des évolutions successives, on multiplie les différents CM successifs. Pour retrouver le taux d'évolution global, on fait (CM global – 1) × 100.

6) Taux réciproque :

Reprenons l'exemple précédent.
De quel pourcentage aurait-on du diminuer le prix de 64,80€ pour revenir au prix initial de 54€ ?

$$\begin{tikzcd} P_1 = 54 \arrow[r, bend left, "\times\ 1{,}2"] \arrow[rr, bend right, "\times\ 1"'] & P_2 = 64{,}80 \arrow[r, bend left, "\times\ \boldsymbol{x}"] & P_3 = 54 \end{tikzcd}$$

Il faut que $1{,}2 \times \boldsymbol{x} = 1$ *donc que* $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{1{,}2} \approx 0{,}83$.

$\boldsymbol{x}$ *est inférieur à 1 donc on a une baisse.*
Pour calculer le taux de baisse on fait $0{,}83 - 1 = -0{,}17$. *La baisse est de 17% environ.*
– 17% est le taux réciproque de + 20%.
Pour revenir au prix de départ après une augmentation de 20% il faut faire une baisse de 17% environ.

Pour obtenir le taux réciproque d'un taux de départ associé au coefficient multiplicateur CM_1, il faut calculer $\dfrac{1}{CM_1} - 1$.

III. INDICES :

1) Exemple :

En France, une nouvelle méthode de recensement a été mise en place en 2004.
Si on veut connaitre rapidement dans quelle proportion évolue la population, on peut choisir 2004 comme année de référence et lui attribuer " l'indice 100 ". C'est un peu comme si on disait qu'en France, en 2004, il y avait 100 habitants.
Par proportionnalité (on connait le nombre d'habitants en 2004 et en 2005), on peut calculer alors l'indice en 2005. Si on trouve 100,8 on en déduira que la population a augmenté de 0,8% entre 2004 et 2005. Si on trouve 99,2 on en déduira que la population a diminué de 0,8%.

2) Définition :

y_1 et y_2 sont deux grandeurs exprimées dans la même unité.
Définir l'indice base 100 de la grandeur correspondant à y_1 c'est associer à y_1 l'indice $I_1 = 100$.
Par proportionnalité on calcule alors l'indice I_2 associé à y_2.
On a : $\frac{I_1}{I_2} = \frac{y_1}{y_2}$ donc, par produit en croix , $I_2 = \frac{I_1 \times y_2}{y_1} = 100 \times \frac{y_2}{y_1}$.

Grandeurs	**y_1**	**y_2**
Indice en base 100	**$I_1 = 100$**	**I_2**

3) Application:

Le taux de natalité en France pour 1 000 habitants était de 18,70 en 1960
et de 12,83 en 2010.
On choisit comme indice de base 100 le taux de natalité pour 1 000 habitants en 1960.

1) Déterminer l'indice en 2010.

Année	1960	2010	2019
Taux de natalité en France pour 1000 habitants	$y_1 = 18{,}70$	$y_2 = 12{,}83$	y_3
Indice en base 100	$I_1 = 100$	I_2	$I_3 = 80$

Pour calculer l'indice en 2010, on applique la formule.
$y_1 = 18{,}70$; $y_2 = 12{,}83$ et $I_1 = 100$
$I_2 = 100 \times \frac{y_2}{y_1} = 100 \times \frac{12{,}83}{18{,}70} \approx 68{,}6$. *L'indice en 2010 est 68,6 environ.*
On en déduit donc que le taux de natalité a baissé entre 1960 et 2010
(car l'indice est inférieur à 100)
et que le pourcentage de baisse est de 31,4% (100 – 68,6 = 31,4).

2) Si l'indice en 2019 est 80, quel est le taux de natalité pour 1000 habitants en 2019 ?

Si $I_3 = 80$ cela signifie que le taux de natalité entre 1960 et 2019 a baissé de 20%.

$y_3 = \frac{y_1 \times I_3}{I_1} = \frac{18{,}70 \times 80}{100} = 14{,}96$

Le taux de natalité pour 1000 habitants en 2019 est de 14,96.