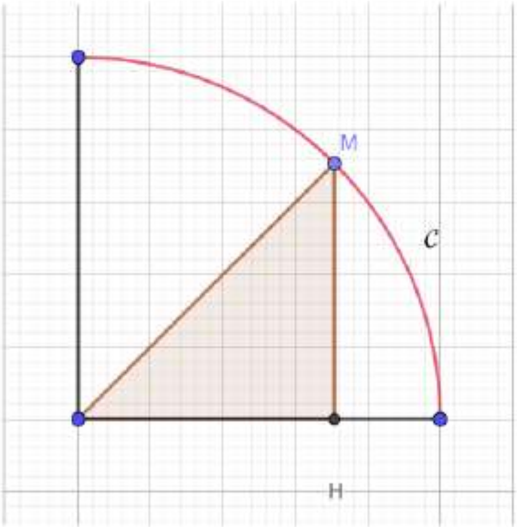
# Fiche d'exercices Fonctions de référence

## Exercice 1 :

On considère un quart de cercle $\mathcal{C}$ de rayon $OI = 1$.
$M$ est un point quelconque de ce quart de cercle. $H$ est le pied de la hauteur issue de $M$ dans le triangle $IMO$.
Le problème consiste à déterminer où placer $M$ pour avoir l'aire du triangle $OHM$ maximale.
On note $x$ la longueur $OH$ et $h$ la longueur $HM$.




**1** Quelles sont les valeurs possibles pour $x$ ?

**2** Exprimer la longueur $h$ en fonction de $x$.

**3** Soit $f$ la fonction qui à $x$ associe l'aire du triangle $OMH$.
Démontrer que :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

**4** Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | |

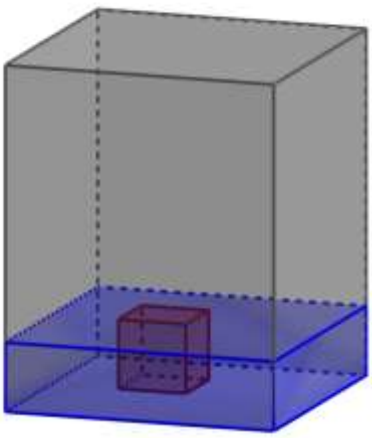
On arrondira les valeurs de $f(x)$ à $10^{-2}$ près.

**5** Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère (unités graphiques : en abscisse 10 cm pour une unité; en ordonnée 20 cm pour une unité).

**6** Déterminer graphiquement le maximum de $f$. Interpréter cette valeur.

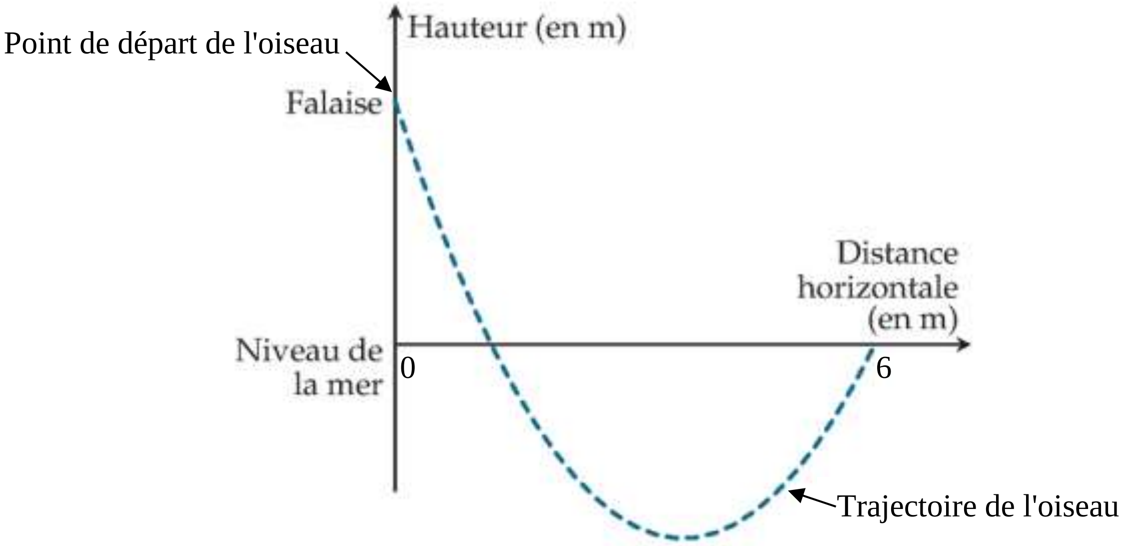
## Exercice 2 :

Emilien a un aquarium à base carrée, de côté 20 cm, dans lequel il veut mettre une petite tortue.
La hauteur de l'aquarium est supérieure à 20 cm.
Driss va lui apporter un cube à placer au fond de l'aquarium, afin que la tortue puisse y monter.
Mais Driss n'a pas précisé la taille du cube :
il a juste dit « son côté mesure entre 5 et 15 cm ».
Du coup, on notera $x$ le côté du cube de Driss.
Emilien, en attendant Driss, veut préparer de l'eau pour remplir l'aquarium de telle sorte que la face supérieure du cube affleure à la surface de l'eau (comme cela la petite tortue pourra aller sur le cube).
Quelle est la quantité d'eau maximale dont Emilien aura besoin pour remplir ainsi son aquarium ?
Expliquer la démarche, justifier votre réponse.



**Exercice 3 :**

Le fou de Bassan est un oiseau qui se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis les falaises de l'île de Bars.




On note h($x$) la hauteur de l'oiseau par rapport au niveau de la mer, en fonction de $x$, la distance, à l'horizontale, séparant l'oiseau de la falaise.

Ainsi, $x = 0$ quand l'oiseau est sur la falaise, au point de départ.

L'oiseau décrit une parabole représentative de la fonction h définie par $h(x) = x^2 - 6x + 5$ avec $x$ un réel compris entre 0 et 6.

1) A l'aide de la calculette, compléter le tableau de valeurs suivant : ( le pas est de 0,5 )

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | | | | | | | | | 5,5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h($x$) | | | | | | | | | | | | | |

2) A l'aide de ce tableau, tracer avec soin, la courbe représentative de la fonction h, sur [ 0 ; 6 ].
   On prendra comme unité, 2 cm pour 1m sur l'axe des abscisses et 2cm pour 1m sur l'axe des ordonnées.

3) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

   a) A quelle hauteur l'oiseau commence-t-il son plongeon ?
   b) Quelle profondeur maximale atteint-il au cours de son plongeon ?
   c) A quelle distance de la falaise pénètre-t-il dans l'eau ? à quelle distance en ressort-il ?

4) En utilisant le vocabulaire des fonctions ( image, antécédent, … ) reformuler les questions et les réponses du 3).

**CORRECTION**

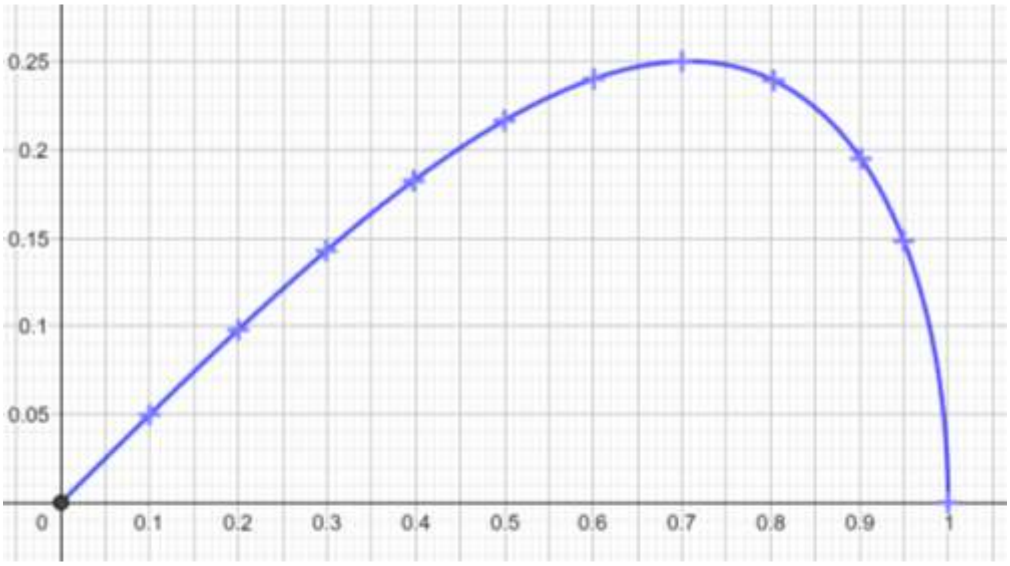
**<u>Exercice 1 :</u>**

1) La longueur OH est comprise entre 0 et la longueur du rayon du cercle soit 1 donc $0 \leq x \leq 1$.
2) Dans le triangle OHM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :
   $OM^2 = OH^2 + HM^2$ donc $1 = x^2 + h^2$ donc $h^2 = 1 - x^2$ donc $h = \sqrt{1-x^2}$
3) Pour calculer l'aire du triangle rectangle OMH, il faut calculer : $\frac{OH \times OM}{2} = \frac{x \times \sqrt{1-x^2}}{2}$.

   On a donc bien $f(x) = \frac{x \times \sqrt{1-x^2}}{2}$.
4)

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,14 | 0,18 | 0,22 | 0,24 | 0,25 | 0,24 | 0,2 | 0,15 | 0 |

5)




6) Le maximum de $f$ semble être atteint pour $x = 0,7$ et il vaut 0,25.
   L'aire du triangle OMH sera maximale quand la distance OH mesurera 0,7cm.
   Cette aire vaudra alors 0,25cm².

**<u>Exercice 2 :</u>**

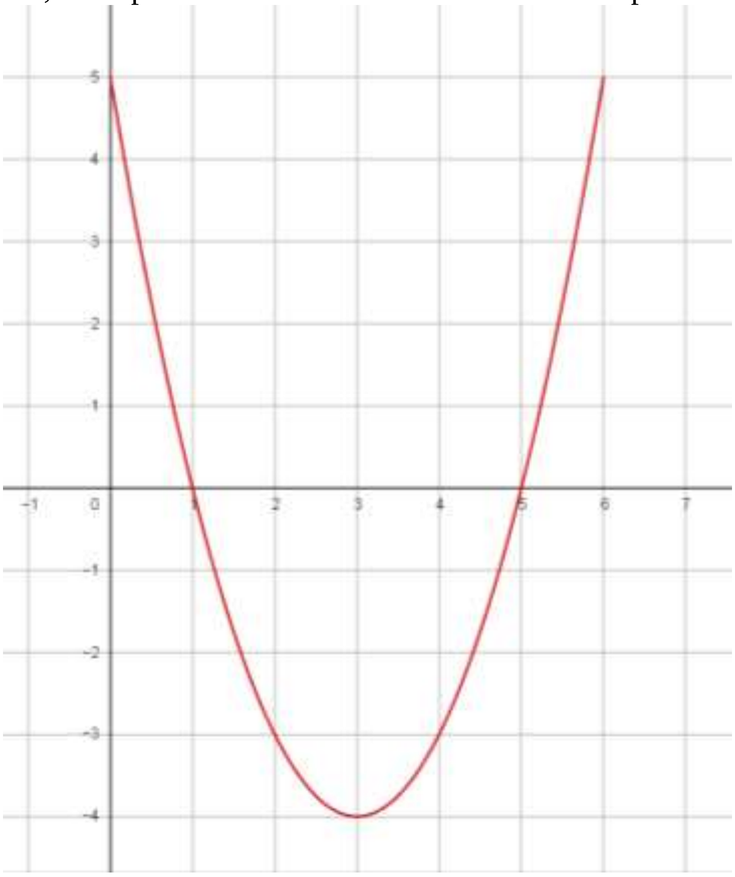
Il faut mettre un volume d'eau correspondant à une hauteur de $\boldsymbol{x}$ .
$V_{eau} = 20 \times 20 \times \boldsymbol{x} = 400\,\boldsymbol{x}$ .
Si $5 < \boldsymbol{x} < 15$ alors $400 \times 5 < 400\boldsymbol{x} < 400 \times 15$ donc $2000 < V_{eau} < 6000$.
Le volume maximal d'eau sera donc de 6000 $cm^3$ soit 6l.
Mais dans cette eau il y aura le petit cube dont le côté mesure entre 5 et 15 cm.
Le volume du petit cube est donc compris entre $5^3 = 125cm^3$ et $15^3 = 3375\ cm^3$.
Le volume d'eau nécessaire sera donc maximal quand le petit cube est le plus petit possible soit quand il mesure 125 $cm^3$.
Donc le volume d'eau maximal que devra prévoir Emilien est de $6000 - 125 = 5875\ cm^3$ soit 5,875l.

**Exercice 3 :**

1) A l'aide de la calculette, compléter le tableau de valeurs suivant : ( le pas est de 0,5 )

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h($x$) | 5 | 2,25 | 0 | –1,75 | –3 | –3,75 | –4 | –3,75 | –3 | –1,75 | 0 | 2,25 | 5 |

2) A l'aide de ce tableau, tracer avec soin, la courbe représentative de la fonction h , sur [ 0 ; 6 ].
On prendra comme unité, 2 cm pour 1m sur l'axe des abscisses et 2cm pour 1m sur l'axe des ordonnées.




3) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

   a) A quelle hauteur l'oiseau commence-t-il son plongeon ?
   L'oiseau commence son plongeon à une hauteur de 5m.
   b) Quelle profondeur maximale atteint-il au cours de son plongeon ?
   Il atteint la profondeur maximale de 4m.
   c) A quelle distance de la falaise pénètre-t-il dans l'eau ? à quelle distance en ressort-il ?
   Il pénètre dans l'eau à 1m des falaises et en ressort 4m plus loin donc à 5m des falaises.

4) En utilisant le vocabulaire des fonctions ( image, antécédent, … ) reformuler les questions et les réponses du 3).
   a) Donner la valeur de h(0). h(0) = 5
   b) Quel est le minimum de la fonction h sur [ 0 ; 6 ] ? Le minimum de h sur [ 0 ; 6 ] est – 4.
   c) Quels sont les antécédents de 0 par h ? Les antécédents de 0 par h sont 1 et 5.