CALCUL INTEGRAL

Avant de commencer

Prérequis

1. Connaître les formules de calcul d'aire.
2. Connaître les fonctions de référence.
3. Étudier la continuité d'une fonction.
4. Savoir dériver une fonction.
5. Déterminer une primitive d'une fonction continue.

1 Déterminer l'aire d'un triangle

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;6]$ par :

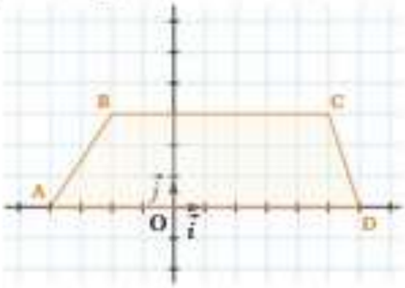
$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x+3 \text{ si } -2\leqslant x\leqslant 0\\ 3-\frac{1}{2}x \text{ si } 0<x\leqslant 6\end{cases}$$

On définit les points A, B et C de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'abscisses respectives -2, 0 et 6.

Représenter la fonction f sur $[-2\,;6]$ puis déterminer l'aire du triangle ABC.

2 Déterminer l'aire d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé du plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B, C et D, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Calculer l'aire du trapèze ABCD.

3 Démontrer la continuité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{2-x^2}{6x-5} \text{ si } x>1\end{cases}$$

Démontrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

4 Déterminer des dérivées

Dériver les fonctions suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $f : x \mapsto 5x^3-\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, avec $I=]0\,;+\infty[$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{5x-10}$, avec $I=]2\,;+\infty[$.
3. $h : x \mapsto e^{2-3x^4}$, avec $I=\mathbb{R}$.
4. $\ell : x \mapsto \frac{1}{3x^2+1}$, avec $I=\mathbb{R}$.

5 Lier primitive et dérivée

On définit les fonctions F et f sur $\mathbb{R}$ par

$F(x)=\frac{4x^2+1}{3x^2+1}$ et $f(x)=\frac{2x}{(3x^2+1)^2}$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6 Déterminer des primitives

Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur I.

1. $f : x \mapsto 3e^x(e^x-2)^2$, avec $I=\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto e^{5x+2}$, avec $I=\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto \frac{6x}{(3x^2-6)^2}$, avec $I=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}$.
4. $k : x \mapsto \frac{x}{(x^2+7)^4}$, avec $I=\mathbb{R}$.
5. $\ell : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, avec $I=\mathbb{R}$.

7 Déterminer une primitive avec une condition initiale

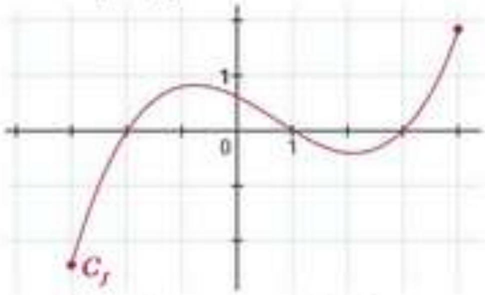
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^2-x+7.$$

1. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive de f s'annulant en -1.

8 Problème

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3\,;4]$.



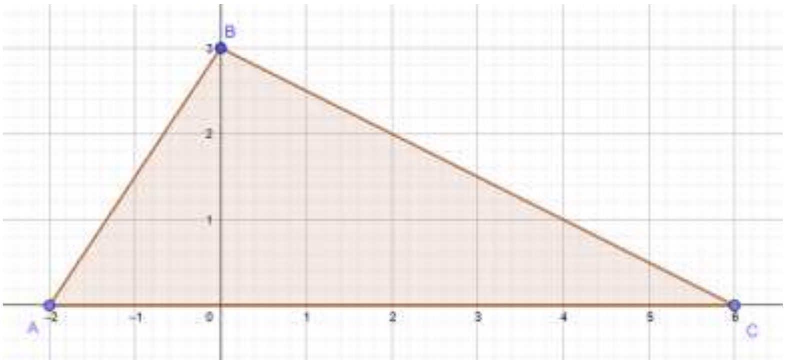
Quelles informations peut-on déduire de ce graphique concernant la fonction dérivée f' et une primitive F de f sur $[-3\,;4]$?

Anecdote

Le symbole $\int$ est dérivé du « s long » employé depuis le Moyen-Âge et fut publié dans un article fondateur de 1686 par Leibniz pour désigner le signe des sommes (s), inverse du signe des différences (d).

Corrigé exercice 1 :

Voici la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.



On cherche donc à calculer l'aire d'un triangle de base de longueur 8 et de hauteur de longueur 3. Ainsi $\mathcal{A} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$.

Corrigé exercice 2 :

L'aire d'un trapèze se calcule avec la formule suivante : $\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \times h}{2}$ où h est la la hauteur du trapèze, B la longueur de sa grande base et b celle de sa petite base.

Dans cet exercice on a donc $\mathcal{A} = \dfrac{(10+7) \times 3}{2} = \dfrac{17 \times 3}{2} = \dfrac{51}{2}$.

Corrigé exercice 3 :

f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{2-x^2}{6x-5} \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \dfrac{2-x^2}{6x-5}$ sont continues respectivement sur $[0;1]$ et sur $]1;+\infty[$.

On doit donc étudier la continuité de f en $x = 1$.

On a d'une part $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{2-x^2}{6x-5} = \dfrac{2-1^2}{6 \times 1 - 5} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1 et, par conséquent, f est continue sur $[0;+\infty[$.

Corrigé exercice 4 :

1. La fonction $f : x \mapsto 5x^3 - \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $I =]0;+\infty[$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle.
2. Et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 5 \times 3x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{30x^4\sqrt{x} - x^2 + 2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$.

3. On définit les fonctions u et v sur $I =]2;+\infty[$ par $u(x) = 5x - 10$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
   Ainsi $g = u \circ v$ d'où, pour tout $x \in I$, $g' = u' \times v' \circ u$, avec $u'(x) = 5$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Ainsi, pour tout réel $x > 2$, $g'(x) = 5 \times \left[\dfrac{1}{2\sqrt{5x-10}}\right] = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-10}}$.

4. On définit les fonctions u et v sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2 - 9x^4$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   Ainsi $h = v \circ u$ d'où $h' = u' \times v' \circ u$, avec $u'(x) = -9 \times 4x^3 = -36x^3$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
   Ainsi, pour tout réel x, $h'(x) = -36x^3 \times \mathrm{e}^{2-9x^4} = -36x^3\mathrm{e}^{2-9x^4}$.
5. On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 + 1$.
   Ainsi $\ell = \dfrac{1}{u}$, ℓ est dérivable sur I et $\ell' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$.
   D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell'(x) = -\dfrac{6x}{(3x^2+1)^2}$.

Corrigé exercice 5 :

On pose les fonctions u et v sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x^2 + 1$ et $v(x) = 3x^2 + 1$.

Ainsi $F = \dfrac{u}{v}$ d'où $F' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 4 \times 2x = 8x$ et $v'(x) = 3 \times 2x = 6x$.

Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{8x(3x^2+1) - (4x^2+1) \times 6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(3x^2+1)^2} = f(x)$.

Donc, F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 6 :

1. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^x - 2$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
   Ainsi $f = 3u'u^2$, d'où une primitive F de f est donnée par $F(x) = (\mathrm{e}^x - 2)^3$.

2. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^x$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
   Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{5} \times 5u'(5x+2)$.
   g admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $G(x) = \dfrac{1}{5}u(5x+2)$.
   Ainsi, pour tout réel x, $G(x) = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x+2}$.

3. On définit la fonction u dérivable sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ par $u(x) = 3x^2 - 6$ avec $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$.
   Ainsi $h = -\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)$ d'où h admet une primitive sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ telle que $H = -\dfrac{1}{u}$.
   Ainsi, pour tout réel x, $H(x) = -\dfrac{1}{3x^2 - 6}$.
4. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 7$ avec $u'(x) = 2x$.
   Ainsi $k = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^4}$ et donc k admet une primitive sur $\mathbb{R}$ telle que $K = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{u^3}\right) = -\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{u^3}$.

Pour tout réel x, $K(x) = -\frac{1}{6}\frac{1}{(x^2+7)^3}$.

5. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 4$ avec $u'(x) = 2x$.
   Ainsi $\ell = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et donc ℓ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ telle que $L = \sqrt{u}$.
   D'où, pour tout réel x, $L(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Corrigé exercice 7 :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout réel x, $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + k$, où k est un réel.

2. La primitive de f s'annulant en -1 vérifie donc $F(-1) = 0$.
   Or $F(-1) = (-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 7 \times (-1) + k$, où k est un réel.
   Et $0 = -1 - \frac{1}{2} - 7 + k \Leftrightarrow k = \frac{17}{2}$.

   La primitive de f s'annulant en -1 est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{17}{2}$.

Corrigé exercice 8 :

D'après le graphique, f semble croissante sur $[-3; -0,8]$ et sur $[2,1; 4]$, et décroissante sur $[-0,8; 2,1]$.

La fonction dérivée f' semble donc devoir être positive sur $[-3; -0,8]$ et sur $[2,1; 4]$, et négative sur $[-0,8; 2,1]$.

Elle semble s'annuler en $x = -0,8$ et $x = 2,1$.

D'après le graphique, f est négative sur $[-3; -2]$ et sur $[1; 3]$, et positive sur $[-2; 1]$ et sur $[3; 4]$.

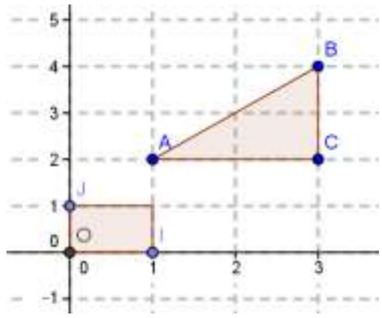
Une fonction primitive F de f est donc décroissante sur $[-3; -2]$ et sur $[1; 3]$, et croissante sur $[-2; 1]$ et sur $[3; 4]$

car $F' = f$.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive.

1/ Unité d'aire.

Dans un repère orthogonal (O, I, J) l'unité d'aire noté UA est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ.



Ainsi l'aire du triangle ABC est 2 UA.

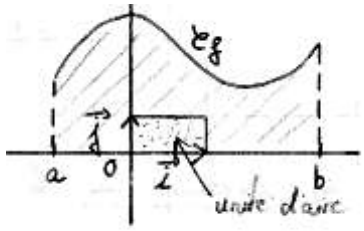
Remarque:

Si OI= 2cm et OJ = 1cm, alors 1ua = 2 cm² et dans ce cas,

L'aire du triangle ABC est 2 UA = 4 cm².

2/ Définition

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a; b]$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** et on note $\int_a^b f(x)dx$

le nombre réel représentant **l'aire du *domaine* hachuré** en unité d'aire.

(ensemble des points $M(x; y)$ tel que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$)

Remarque:

x est une variable muette ainsi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$

3/ Propriétés immédiates:

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a; b]$

- $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Additivité des aires (**Relation de Chasles**)

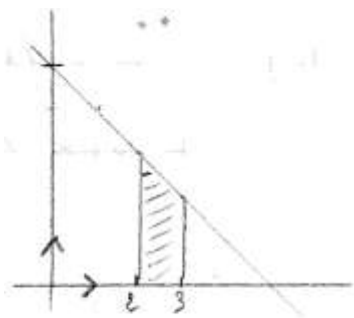
  Pour tout réel c tel que $a \leq c \leq b$, $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Exemples :

1) Calculer: $\int_2^3 (5-x)\ dx$ Posons $f(x) = 5 - x$

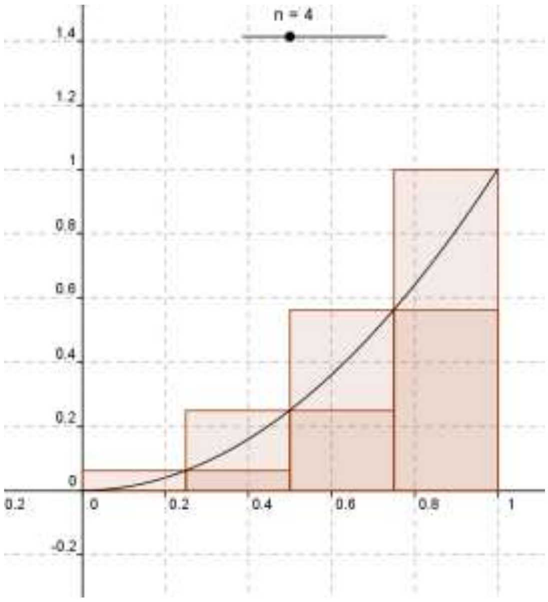
On a : $\int_2^3 (5-x)\ dx = \dfrac{(f(2) + f(3)) \times 1}{2}$

$= \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2}$



4) Exemple de calcul approché d'une aire : On considère la fonction carré sur [0 ; 1]

- en partageant en 4 intervalles de même amplitude l'intervalle [0 ; 1], on encadre $\int_0^1 x^2\,dx$ par la somme des aires des 4 « petits rectangles » et la somme des 4 « grands rectangles »



On a :

$S_1 = 0 + 0{,}25 \times 0{,}25^2 + 0{,}25 \times 0{,}5^2 + 0{,}25 \times 0{,}75^2$

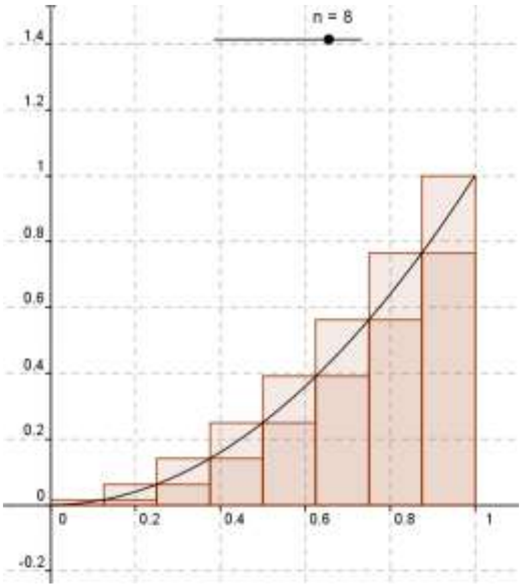
$S_1 = 0{,}21875$

$S_2 = 0{,}25 \times 0{,}25^2 + 0{,}25 \times 0{,}5^2 + 0{,}25 \times 0{,}75^2 + 0{,}25$

$S_2 = 0{,}46875$

Donc $0{,}21875 \leq \int_0^1 x^2\,dx \leq 0{,}46875$

En partageant en 8 intervalles de même amplitude l'intervalle [0 ; 1], on encadre $\int_0^1 x^2\,dx$ par la somme des aires des 8 « petits rectangles » et la somme des 8 « grands rectangles »



On a :

$S_1 = \frac{1}{8} \times \left(0 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{4}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{6}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \right)$

$S_1 = \frac{35}{128} \approx 0{,}27344$

$S_2 = S_1 + \frac{1}{8} \times 1 = \frac{51}{128} \approx 0{,}39843$

Donc $\frac{35}{128} \leq \int_0^1 x^2\,dx \leq \frac{51}{128}$

Théorème fondamental

La fonction F_a définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : **Cas où f est continue, positive et croissante sur $[a;b]$ (Admis pour les autres cas.)**

Activité B p 313

Objectif Démontrer que, dans le cas où f est continue et positive sur $[a\,;\,b]$, la fonction F_a, définie sur $[a\,;\,b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et que $F_a' = f$.

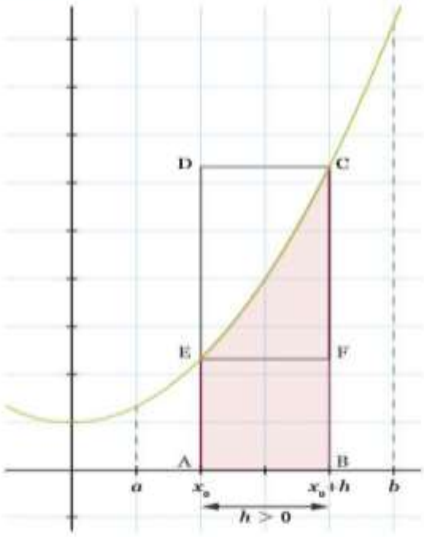
Soient a, b et x_0 trois réels tels que $a < b$ et $x_0 \in [a\,;\,b]$.
On considère une fonction f continue et positive sur $[a\,;\,b]$ et on définit la fonction F_a sur $[a\,;\,b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. On suppose, sans perte de généralité, que f est croissante sur $[a\,;\,b]$.

1 a) Pour tout réel $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$, interpréter graphiquement $F_a(x_0+h)$ et $F_a(x_0)$.
b) En déduire une interprétation graphique de $F_a(x_0+h) - F_a(x_0)$.
c) En utilisant les rectangles ABCD et ABFE, justifier que $hf(x_0) \leqslant F_a(x_0+h) - F_a(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$, puis en déduire un encadrement de $\dfrac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h}$.

2 Recommencer la question précédente avec $h < 0$ tel que $x_0 + h > a$. On fera notamment attention au sens de la double inégalité.

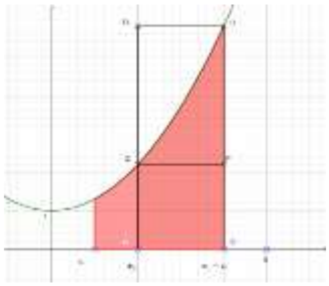
3 Quel argument permet de justifier que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$?

Bilan Déduire des questions précédentes que F_a est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et que $F_a' = f$.

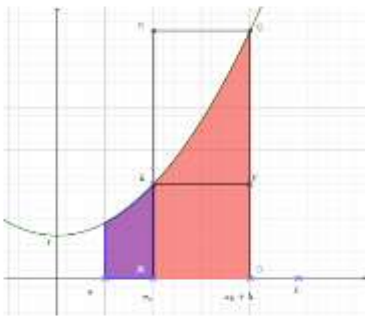


Corrigé activité B :

a. Pour tout réel $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$, $F_a(x_0+h) = \displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites $x = a$ et $x = x_0 + h$ soit l'aire ci-dessous.



$F_a(x_0) = \displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites $x = a$ et $x = x_0$ soit l'aire ci-dessous.



b. L'opération $F_a(x_0+h)-F_a(x_0)$ correspond donc au calcul de l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites $x=x_0$ et $x=x_0+h$.

c. La fonction f étant croissante sur $[a;b]$, on a

$\text{aire}(ABFE) \leqslant F_a(x_0+h)-F_a(x_0) \leqslant \text{aire}(ABCD)$.

Or $\text{aire}(ABCD) = AB \times BC = (x_0+h-x_0)\,[f(x_0+h)-0] = hf(x_0+h)$.

Et $\text{aire}(ABFE) = AB \times AE = (x_0+h-x_0)\,[f(x_0)-0] = hf(x_0)$.

D'où $hf(x_0) \leqslant F_a(x_0+h)-F_a(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$.

On divise ensuite les membres de l'inégalité par $h>0$ et on obtient

$$f(x_0) \leqslant \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

2. Lorsque $h<0$, on a $x_0+h<x_0$. Donc l'opération $F_a(x_0)-F_a(x_0+h)$ donne l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites d'équation $x=x_0+h$ et $x=x_0$.
On peut alors écrire $\text{aire}(ABEF) \leqslant F_a(x_0)-F_a(x_0+h) \leqslant \text{aire}(ABDC)$.

Or, $\text{aire}(ABDC) = AB \times AC = [x_0-(x_0+h)]\,[f(x_0)-0] = -hf(x_0)$ et
$\text{aire}(ABEF) = AB \times BE = [x_0-(x_0+h)]\,[f(x_0+h)-0] = -hf(x_0+h)$

Donc $-hf(x_0+h) \leqslant F_a(x_0)-F_a(x_0+h) \leqslant -hf(x_0)$.

On divise ensuite les membres de l'inégalité par $-h>0$ et on obtient

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{F_a(x_0)-F_a(x_0+h)}{-h} \leqslant f(x_0)$$

d'où $$f(x_0+h) \leqslant \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0).$$

3. f est continue sur $[a;b]$ et donc en x_0. Ce qui permet de conclure que $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Bilan :

Dans les deux cas $h>0$ et $h<0$, les inégalités permettent d'utiliser le théorème d'encadrement et de conclure que $$\lim_{h\to 0}\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Par définition du nombre dérivé de F_a en x_0, on conclut que F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0)=f(x_0)$.
Donc, F_a est dérivable sur $[a;b]$ et $F_a'=f$.

Propriété :

Soient F et f deux fonctions telles que F est une primitive de f sur [a ; b], on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration:

Considérons F_a et F deux primitives de f. Il existe donc un réel k tel que $F_a = F + k$.
On écrit alors : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F_a(b) = F(b) + k$.
Or : $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow F_a(a) = 0 \Leftrightarrow F(a) + k = 0 \Leftrightarrow k = -F(a)$ donc $F(b) + k = F(b) - F(a)$.
On en déduit alors : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

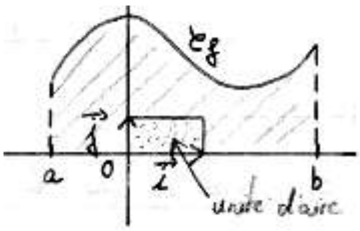
II. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1/ Intégrales d'une fonction positive

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
L'aire du *domaine* hachuré en unité d'aire est:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Démonstration:

La fonction G définie sur $[a; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule pour x = a.
Donc G(x) = $F(x)$ + k , k ∈ ℝ. (1)
Or $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ d'où en reportant dans (1), F(a) + k = 0 ⇔ k = – F(a)
Ainsi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ = G(b) = F(b) + k = F(b) – F(a)

Exemple:

La fonction carré étant positive sur [0; 1], l'aire A= $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$f(x) = x^2$ donc $F(x) = \frac{x^3}{3}$

L'expression $F(1) - F(0)$ se note aussi $[F(x)]_0^1$ (notation crochet)

2/ <u>Extension :définition</u>

Soit f une fonction continue (<u>de signe quelconque)</u> sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Soit a et b deux réels de I. On définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on détermine d'abord une primitive F de f sur I, et on écrit:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3/ <u>Propriétés</u>

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I et λ un réel.

a/ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Démonstration: $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$

b/ Relation de Chasles: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

Démonstration: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$

c/ Linéarité de l'intégrale:

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ **et** $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Démonstration: Une primitive de $f + g$ est $F + G$ d'où

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b \lambda f(x)dx = (\lambda F)(b) - (\lambda F)(a) = \lambda (F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)dx$

d/ Positivité ($a \leq b$)

¤Si f est positive sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ démonstration : l' intégrale est une aire donc positive.

¤Si f est négative sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Démonstration: $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b - f(x)\,dx$ et $-f$ est positive donc $\int_a^b - f(x)dx \geq 0$

e/ Ordre: ($a \leq b$)

Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration:

Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $g - f \geq 0$ sur $[a; b]$,

D'où $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

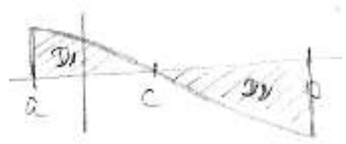
4/ Intégrale et aire.

a/ Dans une repère orthogonal, on note D le domaine compris entre la courbe C représentant une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = a$ et $x = b$ avec $\boldsymbol{a \leq b}$

Cas d'une fonction continue et **positive** sur $[a; b]$: Aire D $= \int_a^b f(x)dx\ ua$

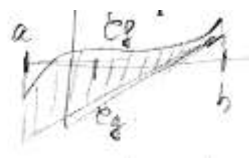
Cas d'une fonction continue et **négative** sur $[a; b]$: Aire D $= -\int_a^b f(x)dx\ ua$

Cas d'une fonction continue et de **signe quelconque** sur $[a; b]$:



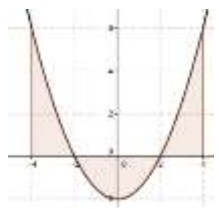
Aire D $= \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\ \ ua$

Propriété: Aire entre deux courbes:



Si sur un intervalle $[a; b]$, f et g sont continue et $f \leq g$ alors l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx\ ua$

Exercice 1:



La courbe ci-contre représente la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Résoudre l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$ S = { – 2 ; 2 }

Calculer l'aire A du domaine colorié: $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - 2x = \frac{x^3}{6} - 2x$

$$\int_{-4}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = F(-2) - F(-4) - F(2) + F(-2) + F(4) - F(2)$$

$$= 2F(-2) - 2F(2) + F(4) - F(-4)$$

$$= 2 \times \frac{8}{3} + 2 \times \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3}$$

$= 16$ u.a

ou Pour tout réel x de $[-4; 4]$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi A = 2B où B représente l'aire coloriée sur l'intervalle $[0; 4]$.

$$B = aire(D_1) + aire(D_2) = -\int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = -\left[\frac{x^3}{6} - 2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{6} - 2x\right]_2^4$$

$$= -\left(\frac{4}{3} - 4\right) + \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{16}{3}$$

$$= 8$$

Donc A = 16 u.a

Exercice 2:

1/ Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x\sqrt{x}$. Calculer $h'(x)$.
2/ Les courbes ci-contre représentent les fonctions
f et g définie sur $[1;4]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ et $g(x) = 3\sqrt{x} - 5$
Calculer l'aire A du domaine colorié.

1/ $h'(x) = 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$

2/ Montrons que sur $[1;4]$ $f \geq g$

g est une fonction croissante sur [1 ; 4] car $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ positif. Son maximum est g(4) = 1.

$f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} + 1 = \dfrac{x^3 - 2}{x^3}$. $x^3 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$

f est donc décroissante sur $[1 ; \sqrt[3]{2}]$ et croissante sur $[\sqrt[3]{2} ; 4]$ donc son minimum est $f(\sqrt[3]{2}) \approx 1{,}89$.
Sur [1 ; 4] le minimum de f est supérieur au maximum de g donc $f \geq g$ sur [1 ; 4].

Ainsi $A = \int_1^4 f(x) - g(x)dx = \int_1^4 \frac{1}{x^2} + x - 3\sqrt{x} + 5\, dx$

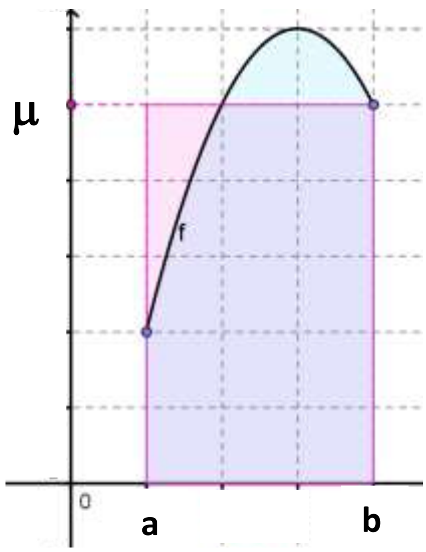
$$= \left[-\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - 2x\sqrt{x} + 5x\right]_1^4$$
$$= -\frac{1}{4} + 8 - 16 + 20 - \left(-1 + \frac{1}{2} - 2 + 5\right)$$
$$= \frac{47}{4} - \frac{5}{2}$$
$$= \frac{37}{4}$$
$$= 9{,}25\ ua$$

b/ Valeur moyenne

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ avec $(a \neq b)$ est le nombre réel défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Remarque: Avec la calculatrice: pour calculer $\int_1^0 x^2 dx$, Math→9.fnInt (x^2, x, 1, 0)



La valeur moyenne d'une fonction est le réel μ tel que le rectangle de largeur b – a et de longueur μ ait la même aire que l'aire sous la courbe de la fonction f.

En effet $(b - a) \times \mu = \int_a^b f(x)dx$

Exercice 3: Soit f la fonction représentée ci-contre et définie par $f(x) = -(x-3)^2 + 6$

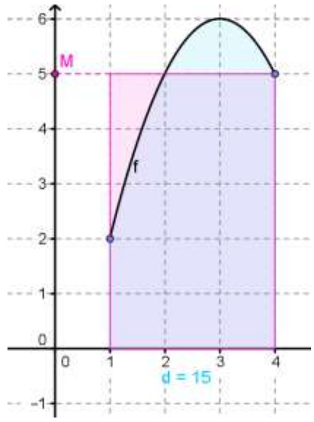
a/ Interpréter géométriquement $\int_1^4 f(x)dx$

b/ Déterminer la valeur moyenne μ de f sur $[1; 4]$.

c/ Interpréter géométriquement μ

a/ f est un polynôme du second degré, du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines $3-\sqrt{6} \approx 0{,}55$ et $3+\sqrt{6} \approx 5{,}45$

Donc f est positif sur [1;4], $\int_1^4 f(x)dx$ correspond à l'aire A du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \ et \ x = 4$.



b/ $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 -x^2 + 6x - 3dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 3x\right]_1^4$

$= -\frac{64}{3} + 48 - 12 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 3\right)$

$= 15$

c/ $\mu = \frac{1}{3} \times A$ d'où $A = 3 \times \mu$

μ correspond à la hauteur du rectangle de base [1;4] qui à pour aire A.

III. Intégration par parties

Propriété : intégration par partie

On considère deux fonctions u et v telles que u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Alors : $$\int_a^b (u'v)(x)dx = [(uv)(x)]_a{}^b - \int_a^b (uv')(x)dx$$

Démonstration :

Par opérations de fonctions dérivables, $u \times v$ est dérivable sur [a ; b] et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Donc, pour tout réel $x \in [a; b]$, on a $(u \times v)'(x) = (u'v + uv')(x)$.

u et v sont des fonctions dérivables sur $[a; b]$ et sont continues.

Par opérations sur les fonctions continues, $(uv)', u'v, uv' et\ uv' + u'v$ sont continues sur $[a; b]$.

Elles admettent donc des primitives.

On obtient : $\int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b [(u'v)(x) + (uv')(x)]dx$

Soit $[(uv)(x)]_a{}^b = \int_a^b (u'v)(x)dx + \int_a^b (uv')(x)dx$ par linéarité de l'intégrale

D'où $\int_a^b (u'v)(x)dx = [(uv)(x)]_a{}^b - \int_a^b (uv')(x)dx$

Exemples : Calculer $\int_{-1}^0 x\, e^x\, dx$

On définit les fonctions u et v sur [-1 ; 0] par $u'(x) = e^x$ et $v(x) = $ x

Ainsi pour tout $x \in [-1\,; 0]$, on peut poser $u(x) = e^x\ et\ v'^{(x)} = 1$

u et v sont dérivables sur $[-1\,; 0]$, $u'et\ v'$sont continues sur $[-1\,; 0]$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$\int_{-1}^0 x\, e^x\, dx = [x\, e^x]_{-1}{}^0 - \int_{-1}^0 e^x\, dx = e^{-1} - [\,e^x]_{-1}{}^0 = \mathbf{2e^{-1} - 1}$$