

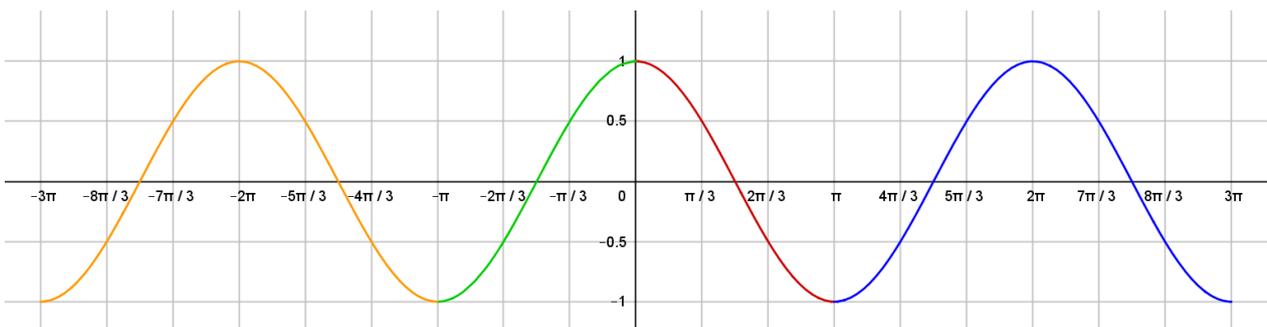
Ch12 LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

I. La fonction cosinus :

- Son ensemble de définition est \mathbb{R} .
- Pour tout réel x , **$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$** La fonction cosinus est périodique de période 2π .
Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π soit par exemple sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
- Pour tout réel x , **$\cos(-x) = \cos(x)$** La fonction cosinus est paire.
Sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
- Valeurs remarquables de la fonction cosinus :
Pour tout entier relatif k , **$\cos(2k\pi) = 1$; $\cos((2k+1)\pi) = -1$ et $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$**
Il faut aussi connaître les images des nombres des "familles" $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.
- Dérivée de la fonction cosinus : cos est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , **$\cos'(x) = -\sin(x)$**
- Tableau de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\sin(x)$	-	-	0	+	+
Signe de $-\sin(x)$	+	+	0	-	-
variations de $\cos x$					

- Tracé de la courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère orthogonal :



Remarque : On trace la courbe sur $[0 ; \pi]$ (partie rouge)
 puis on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. (partie verte)
 On obtient ainsi la courbe sur $[-\pi ; \pi]$ qui représente une période.
 On effectue alors des translations de vecteur $2\pi \times \vec{i}$ (partie bleue) ou $-2\pi \times \vec{i}$ (partie orange)
 pour obtenir une courbe plus complète.
Cette courbe est une sinusoïde.

- Dérivée de la composée $\cos(u)$: **si u est dérivable sur I , alors $\cos(u)$ est dérivable sur I et $\cos'(u) = -u' \sin(u)$**

En particulier, lorsque u est une fonction affine $ax + b$, on a **si $f(x) = \cos(ax + b)$ alors $f'(x) = -a \sin(ax + b)$**

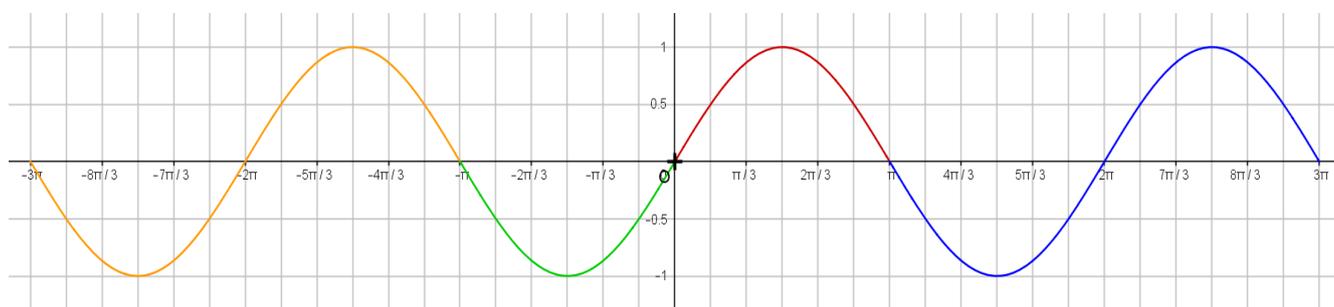
Exemple : si $f(x) = \cos(2x)$ alors $f'(x) = -2 \sin(2x)$

II. La fonction sinus :

- Son ensemble de définition est \mathbb{R} .
- Pour tout réel x , **$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$** La fonction sinus est périodique de période 2π .
Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π soit par exemple sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
- Pour tout réel x , **$\sin(-x) = -\sin(x)$** La fonction sinus est impaire.
Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0 ; \pi]$
- Valeurs remarquables de la fonction sinus :
Pour tout entier relatif k , **$\sin(k\pi) = 0$; $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ et $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$**
Il faut aussi connaître les images des nombres des "familles" $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$
- Dérivée de la fonction sinus : sin est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , **$\sin'(x) = \cos(x)$**
- Tableau de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$	-	0	+	+	-
variations de $\sin x$	0	\searrow	-1	\nearrow	1
					\searrow
					0

- Tracé de la courbe représentative de la fonction sinus dans un repère orthogonal :



- Remarque :* On trace la courbe sur $[0 ; \pi]$ (partie rouge)
puis on complète par symétrie par rapport à l'origine du repère.(partie verte)
On obtient ainsi la courbe sur $[-\pi ; \pi]$ qui représente une période.
On effectue alors des translations de vecteur $2\pi \times \vec{i}$ (partie bleue) ou $-2\pi \times \vec{i}$ (partie orange)
pour obtenir une courbe plus complète.
Cette courbe est une sinusoïde.

- Dérivée de la composée $\sin(u)$: si u est dérivable sur I , alors $\sin(u)$ est dérivable sur I et **$\sin'(u) = u' \cos(u)$**

En particulier, lorsque u est une fonction affine $ax + b$, on a : **si $f(x) = \sin(ax + b)$, alors $f'(x) = a \cos(ax + b)$**

Exemple : si $g(x) = \sin(3x - 1)$ alors $g'(x) = 3 \cos(3x - 1)$

III. Applications :

1) Etude d'une fonction comportant un sinus ou un cosinus :

Exemple 1 : $g(x) = 5 \cos (2x + 1)$. Etudier la fonction g sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$

Exemple 2 : $f(x) = \cos x \times \sin x$. Etudier la fonction f sur $[-\pi ; \pi]$.

2) Le cas particulier de la fonction tangente :

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{La fonction tangente est définie sur } \mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \times \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

car $\cos x$ ne doit pas être nul.

Etudier la fonction tangente sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$.

Posons $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

g est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \cos x$

$u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$

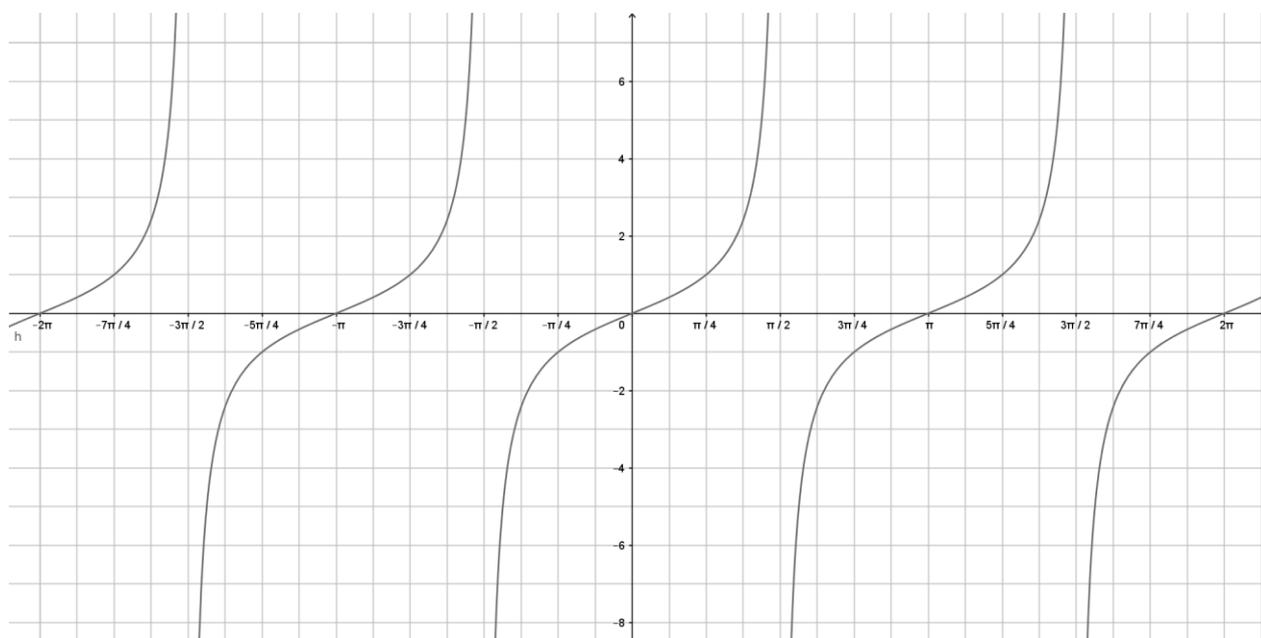
$$g'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Signe de $g'(x)$: $\cos^2 x \geq 0$ donc $g'(x)$ est positive ou nulle

donc g est strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$

La fonction tangente est strictement croissante sur tous les intervalles

$] - (2k+1) \times \frac{\pi}{2}; (2k+1) \times \frac{\pi}{2} [$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Remarques : **La fonction tangente est périodique de période π .**

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

On peut donc l'étudier et tracer sa courbe sur un intervalle de longueur π puis effectuer des translations successives de vecteur $\pi \times \vec{i}$ ou $-\pi \times \vec{i}$.

La fonction tangente est impaire $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

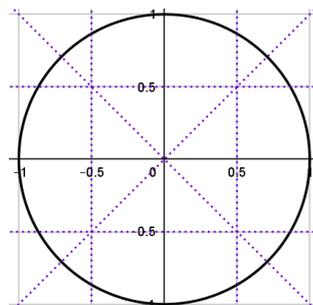
On aurait pu l'étudier sur un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$ centré sur 0.

Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

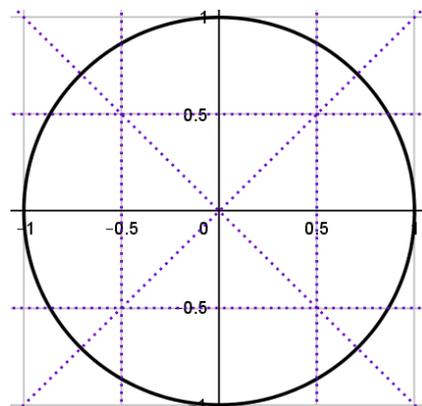
3) Etude du signe d'une expression comportant un cosinus ou résolution d'équation comportant un cosinus :

Méthode à mettre en œuvre : on isole le cosinus puis on utilise le cercle trigo

Exemple 1 : étudier le signe de $\sqrt{3} + 2\cos(x)$ sur $[-\pi ; \pi]$.



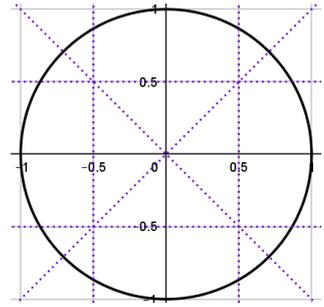
Exemple 2 : résoudre $2\cos(\pi - \frac{x}{2}) = -1$ sur $[-\pi ; \pi]$.



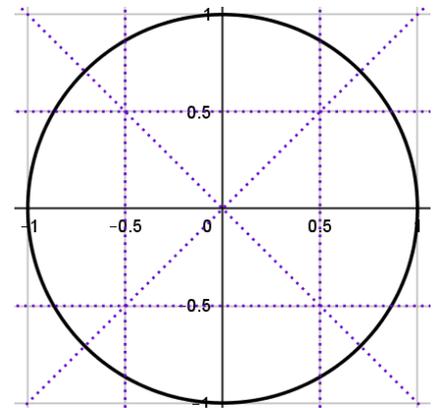
4) Etude du signe d'une expression comportant un sinus ou résolution d'équation comportant un sinus :

Méthode à mettre en œuvre : on isole le sinus puis on utilise le cercle trigo

Exemple 3 : étudier le signe de $1 - 2 \sin(2x)$ sur $[0 ; \pi]$.



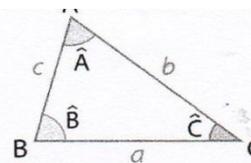
Exemple 4 : résoudre $\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$ sur $[0 ; \pi]$.



5) Relations métriques dans un triangle

THÉORÈME D'AL-KASHI Dans un triangle ABC, avec les notations ci-contre :

- (1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
- (2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$
- (3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$



Démonstration :

$a^2 = BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - 2 \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$
avec H projeté orthogonal de B sur (AC).

Or dans le triangle AHB rectangle en H, $\cos A = \frac{AH}{AB}$ donc $AH = AB \cos A$

Donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times AH \times AC$ (vecteurs colinéaires de même sens)

$$= b^2 + c^2 - 2 AB \cos A \times AC$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De même pour les autres formules.

PROPRIÉTÉ DE L'AIRE D'UN TRIANGLE Dans un triangle ABC d'aire S :

$$(1) S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} \quad (2) S = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} \quad (3) S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$$

Démonstration :

Dans le triangle AHB rectangle en H, $\sin A = \frac{BH}{AB}$ donc $BH = AB \sin A$

$$S = \frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BH \times AC}{2} = \frac{1}{2} \times AC \times AB \sin A = \frac{1}{2} bc \sin A$$

De même avec les autres hauteurs.

FORMULE DES SINUS Dans un triangle ABC,

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Démonstration :

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B \Leftrightarrow b \sin A = a \sin B \quad (\text{car } c \neq 0) \Leftrightarrow b = a \frac{\sin B}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad (\text{car } \sin A \neq 0 \text{ et } \sin B \neq 0)$$

6) Formules d'addition et de duplication

a) Formules d'addition

PROPRIÉTÉS Pour tous nombres réels a et b ,

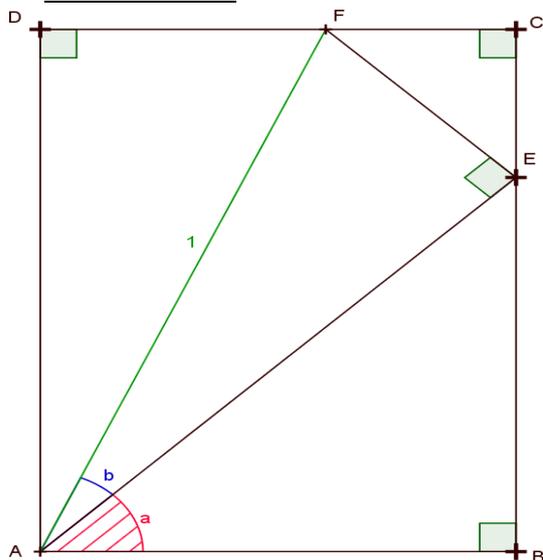
- (1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- (2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- (3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- (4) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

b) Formules de duplication

PROPRIÉTÉS Pour tout nombre réel a ,

- (1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- (2) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Démonstration :



Dans le rectangle ABCD, on a :

- Un triangle ABC, rectangle en B, tel que $E \in [BC]$.
On note a la mesure de l'angle BAE.
 - Un triangle AEF, rectangle en E, tel que $F \in [DC]$.
On note b la mesure de l'angle EAF et 1 la mesure du segment [AF].
- 1) Déterminer, en fonction de a , les mesures des angles BEA, CEF et CFE.

2) Déterminer, en fonction de a et b , celle de AFD.

