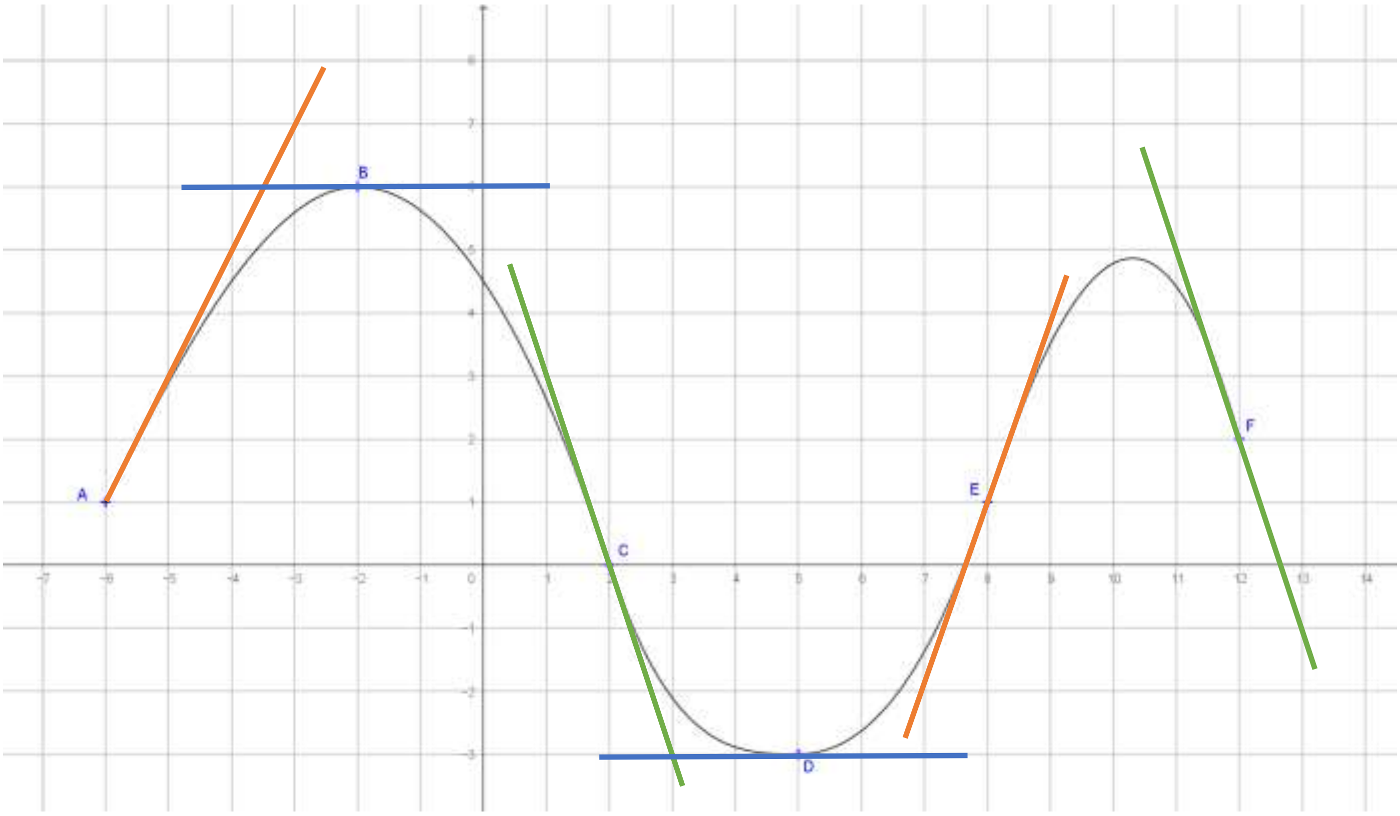
CHAPITRE 6 DERIVATION

I. Approche graphique du nombre dérivé :

1) Exercice:

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



1) Tracer les tangentes à la courbe de f aux points A,B,C,D,E et F.
2) Quel semble être le lien entre la pente de la courbe et le sens de variation de la fonction f ?

   Si la tangente " monte ", la fonction f semble croissante.

   Si la tangente " descend ", la fonction f semble décroissante.

   Si la tangente est horizontale, la fonction f semble présenter un extrémum (maximum ou minimum)

3) Lire le coefficient directeur de chacune des tangentes tracées:

   Rappel : Le coefficient directeur d'une droite est m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   Coefficient directeur de la tangente en A : $\frac{2}{1} = 2$

   Coefficient directeur de la tangente en B : 0.
   Une tangente horizontale a toujours un coefficient directeur nul.(qui vaut 0)

   Coefficient directeur de la tangente en C : $\frac{3}{-1} = -3$

   Coefficient directeur de la tangente en D : 0

   Coefficient directeur de la tangente en E : $\frac{3}{1} = 3$

   Coefficient directeur de la tangente en F : $\frac{3}{-1} = -3$

4) Quel semble être le lien entre le signe du coefficient directeur de la tangente et les variations de la fonction f ?

Si la tangente a un coefficient directeur positif, la fonction f semble croissante.
Si la tangente a un coefficient directeur négatif, la fonction f semble décroissante.
Si la tangente a un coefficient directeur nul, la fonction f semble présenter un extrémum.

5) Etablir les équations des tangentes tracées :

Equation de la tangente en A :

L'équation est de la forme $y = 2\boldsymbol{x} + p$ car $m = 2$.
A $(-6 ; 1)$ est sur la tangente donc $1 = 2 \times (-6) + p$ donc $1 = -12 + p$ donc $p = 13$.
L'équation de la tangente en A est donc $y = 2\boldsymbol{x} + 13$.

Equation de la tangente en B :

L'équation est de la forme $y = 0\boldsymbol{x} + p$ car $m = 0$.
B $(-2 ; 6)$ est sur la tangente donc $6 = 0 \times (-2) + p$ donc $6 = 0 + p$ donc $p = 6$.
L'équation de la tangente en B est donc $y = 0\boldsymbol{x} + 6$ donc $y = 6$.

Equation de la tangente en C :

L'équation est de la forme $y = -3\boldsymbol{x} + p$ car $m = -3$.
C $(2 ; 0)$ est sur la tangente donc $0 = -3 \times 2 + p$ donc $0 = -6 + p$ donc $p = 6$.
L'équation de la tangente en C est donc $y = -3\boldsymbol{x} + 6$.

Equation de la tangente en D :

L'équation est de la forme $y = 0\boldsymbol{x} + p$ car $m = 0$.
D $(5 ; -3)$ est sur la tangente donc $-3 = 0 \times 5 + p$ donc $-3 = 0 + p$ donc $p = -3$.
L'équation de la tangente en D est donc $y = 0\boldsymbol{x} - 3$ donc $y = -3$.

Equation de la tangente en E :

L'équation est de la forme $y = 3\boldsymbol{x} + p$ car $m = 3$.
E $(8 ; 1)$ est sur la tangente donc $1 = 3 \times 8 + p$ donc $1 = 24 + p$ donc $p = -23$.
L'équation de la tangente en E est donc $y = 3\boldsymbol{x} - 23$.

Equation de la tangente en F :

L'équation est de la forme $y = -3\boldsymbol{x} + p$ car $m = -3$.
F $(12 ; 2)$ est sur la tangente donc $2 = -3 \times 12 + p$ donc $2 = -36 + p$ donc $p = 38$.
L'équation de la tangente en F est donc $y = -3\boldsymbol{x} + 38$.

2) Définitions :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse a est appelé nombre dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$.

Exemples avec la courbe précédente :

$f'(-6) = 2$; $f'(-2) = 0$; $f'(2) = -3$; $f'(5) = 0$; $f'(8) = 3$; $f'(12) = -3$

Point A ; Point B ; Point C ; Point D ; Point E ; Point F

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemples avec la courbe précédente :

Au point A d'abscisse -6 l'équation de la tangente est :

$y = f'(-6)(x - (-6)) + f(-6)$

On lit $f(-6) = 1$ et $f'(-6) = 2$

On remplace dans l'équation : $y = 2(x + 6) + 1$

On développe : $y = 2x + 12 + 1$

On réduit : $y = 2x + 13$

On constate que l'on obtient bien la même équation que dans la question 5) de l'exercice.

II. Fonction dérivée :

1) Formules:

On ne pourra pas souvent lire un nombre dérivé sur une courbe car dans la plupart des exercices la courbe de la fonction ne sera pas tracée. On devra donc calculer le nombre dérivé.
Pour cela on va utiliser un tableau de formules, à apprendre par cœur :

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(x) = p$ p est un nombre réel	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = mx$ m est un nombre réel	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exemple : On prend la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x + 8$

1) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$.

   $f'(x) = 2x + 2$

2) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

   $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

   On calcule $f(3) = 3^2 + 2 \times 3 + 8 = 23$ et $f'(3) = 2 \times 3 + 2 = 8$

   On remplace dans l'équation : $y = 8(x - 3) + 23$

   On développe : $y = 8x - 24 + 23$

   On réduit : $y = 8x - 1$

2) Lien entre le signe de la fonction dérivée et les variations de la fonction :

a) Fonctions affines :

$f(x) = -3x + 5$ $f'(x) = -3$ $g(x) = 5x - 2$ $g'(x) = 5$

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	↘

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	↗

Si $f(x) = mx + p$ alors $f'(x) = m$.

Si $m > 0$ la fonction affine est croissante. Donc **si $f'(x) > 0$, la fonction affine est croissante.**

Si $m < 0$ la fonction affine est décroissante. Donc **si $f'(x) < 0$, la fonction affine est décroissante**

b) Fonctions de degré 2 :

$f(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}^2 - 5x + 4$

$f'(\boldsymbol{x}) = 6\boldsymbol{x} - 5$

Signe de $f'(\boldsymbol{x})$:

$6\boldsymbol{x} - 5 = 0$ $\qquad$ $6\boldsymbol{x} - 5 > 0$

$x = \mathbf{\frac{5}{6}}$ $\qquad$ $x > \frac{5}{6}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$\searrow$	$\frac{23}{12}$	$\nearrow$

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{6} + 4 = \frac{23}{12}$$

$g(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^2 + 3x - 2$

$g'(\boldsymbol{x}) = -2\boldsymbol{x} + 3$

Signe de $g'(\boldsymbol{x})$:

$-2\boldsymbol{x} + 3 = 0$ $\qquad$ $-2\boldsymbol{x} + 3 > 0$

$x = \mathbf{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $x < \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de g	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{4}$$

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors $f'(x) = 2ax + b$

Pour connaitre les variations de f, il faut étudier le signe de $f'(x)$.

- on résout $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 0$
- on met ensuite les résultats dans la ligne du signe de $f'(x)$
- on trace les flèches pour les variations de f

  si $f'(x)$ positive, f croissante

  si $f'(x)$ négative, f décroissante.

c) Fonctions de degré 3 :

$f(\boldsymbol{x}) = 2x^3 - 7$

$f\,'(\boldsymbol{x}) = 2 \times 3\boldsymbol{x}^2 + 0 = 6\boldsymbol{x}^2$

Signe de $f\,'(\boldsymbol{x})$:

$\boldsymbol{x}^2$ est toujours positif donc $f\,'(\boldsymbol{x}) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f\,'(x)$		$+$	
Variations de f		↗	

$g(\boldsymbol{x}) = -3x^3 + 4x + 8$

$g\,'(\boldsymbol{x}) = -3 \times 3\boldsymbol{x}^2 + 4 = -9\boldsymbol{x}^2 + 4$

Signe de $g\,'(\boldsymbol{x})$:

$g\,'(\boldsymbol{x}) = 4 - 9\boldsymbol{x}^2 = (2 - 3\boldsymbol{x})(2 + 3\boldsymbol{x})$

$2 - 3\boldsymbol{x} = 0$ $\quad$ $2 - 3\boldsymbol{x} > 0$ $\quad$ $2 + 3\boldsymbol{x} = 0$ $\quad$ $2 + 3\boldsymbol{x} > 0$

$\boldsymbol{x} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\boldsymbol{x} < \frac{2}{3}$ $\quad$ $\boldsymbol{x} = -\frac{2}{3}$ $\quad$ $\boldsymbol{x} > -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $2 - 3\boldsymbol{x}$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2 + 3\boldsymbol{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $g\,'(\boldsymbol{x}) = (2 - 3\boldsymbol{x})(2 + 3\boldsymbol{x})$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g		↘	$\frac{56}{9}$	↗	$\frac{88}{9}$	↘	

$g\left(-\frac{2}{3}\right) = -3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 8 = \frac{56}{9}$; $g\left(\frac{2}{3}\right) = -3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 8 = \frac{88}{9}$

Si $f(x) = ax^3 + b\,x^2 + cx + d$ alors $f\,'(x) = 3a\,x^2 + 2bx + c$

Pour connaitre les variations de f , il faut étudier le signe de $f\,'(x)$.

- on résout $f\,'(x) = 0$ puis $f\,'(x) > 0$

  (il faudra souvent factoriser l'expression $f\,'(x)$)
- on met ensuite les résultats dans la ligne du signe de $f\,'(x)$
- on trace les flèches pour les variations de f

  si $f\,'(x)$ positive, f croissante

  si $f\,'(x)$ négative, f décroissante.

c) Factorisation et racines d'un trinôme :

Exemple : On donne $f(x) = 2x^3 - \frac{33}{2}x^2 + 45x - 8$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer $f'(x)$.

$f'(x) = 6x^2 - 33x + 45$

2) Montrer que 3 et $\frac{5}{2}$ sont les racines de $f'(x)$.

Pour montrer que α est une racine de $f'(x)$, il faut montrer que $f'(\alpha) = 0$

$f'(3) = 6 \times 3^2 - 33 \times 3 + 45 = 0$

$f'(\frac{5}{2}) = 6 \times (\frac{5}{2})^2 - 33 \times \frac{5}{2} + 45 = 0$

Donc 3 et $\frac{5}{2}$ sont des racines de $f'(x)$.

3) En déduire une factorisation de $f'(x)$.

Pour factoriser un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, sachant que α et β sont deux racines de ce trinôme, on écrit : $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

Pour $f'(x) = 6x^2 - 33x + 45$ on sait que 3 et $\frac{5}{2}$ sont des racines donc on peut écrire

$f'(x) = 6(x - 3)(x - \frac{5}{2})$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Signe de $x - 3$:

$x - 3 < 0$	$x - 3 = 0$	$x - 3 > 0$
$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$

Signe de $x - \frac{5}{2}$:

$x - \frac{5}{2} < 0$	$x - \frac{5}{2} = 0$	$x - \frac{5}{2} > 0$
$x < \frac{5}{2}$	$x = \frac{5}{2}$	$x > \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
signe de a = 6		+		+		+	
signes de $x - 3$		–		–	0	+	
signes de $x - \frac{5}{2}$		–	0	+		+	
signes de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
variations de f		↗	$\frac{261}{8}$	↘	$\frac{65}{2}$	↗	

$f(3) = 2 \times 3^3 - \frac{33}{2} \times 3^2 + 45 \times 3 - 8 = \frac{65}{2}$

$f(\frac{5}{2}) = 2(\frac{5}{2})^3 - \frac{33}{2}(\frac{5}{2})^2 + 45 \times \frac{5}{2} - 8 = \frac{261}{8}$