S2 F5 : **Les racines carrées**

Définition :

A est un nombre positif ou nul, il existe un unique nombre a positif ou nul tel que : $a^2 = A$.
a est appelé racine carrée de A et se note $\sqrt{A}$.
On peut alors écrire, pour tout A réel positif ou nul, $(\sqrt{A})^2 = A$.

Règles de calcul

Opérations	**Conditions**	**Résultats**
Produit de deux racines	$a \geq 0$ $b \geq 0$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
Quotient de deux racines	$a \geq 0$ $b > 0$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
Puissance d'une racine	n entier naturel $a \geq 0$	$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$

Propriété :
Si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$
Si $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$

Pour simplifier une expression comportant un radical, il faut décomposer le nombre sous le radical en un produit comportant des carrés parfaits.

Liste des carrés parfaits :

$2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; $10^2 = 100$; $11^2 = 121$; $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$

Exemples: $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Exercices:

Exercice 1: Simplifier les expressions

$A = \sqrt{16}$ $B = \sqrt{12}$ $C = \sqrt{36}$ $D = \sqrt{20}$ $E = \sqrt{48}$ $F = \sqrt{50}$ $G = \sqrt{49}$

$H = \sqrt{72}$ $I = \sqrt{27}$ $J = \sqrt{125}$ $K = \sqrt{80}$ $L = \sqrt{48}$ $M = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}}$ $N = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$

Exercice 2: Simplifier

$A = \sqrt{24} \times \sqrt{30}$

$B = \sqrt{35} \times \sqrt{14}$

$C = \sqrt{21} \times \sqrt{14} \times \sqrt{50}$

$D = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{18}$

$E = 3\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - 5\sqrt{54}$

$F = 2\sqrt{27} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{8}$

$G = 7\sqrt{12} + 9\sqrt{5} + 8\sqrt{20} - 6\sqrt{27}$

$H = 12\sqrt{8} - 9\sqrt{50} + 7\sqrt{200} + \sqrt{128}$

$I = 6\sqrt{48} - 9\sqrt{75} + 7\sqrt{45} - 2\sqrt{27}$

$J = 2\sqrt{8} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{800} + \sqrt{162}$

Exercice 3 : Enlever les racines carrées au dénominateur d'une fraction.

- Le dénominateur est formé d'une seule racine carrée ou d'un produit d'un réel et d'une racine carrée :
  On multiplie par la racine carrée, numérateur et dénominateur.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

ou $$\frac{3 + 7\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} = \frac{(3 + 7\sqrt{2}) \times \sqrt{6}}{4\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 7\sqrt{12}}{4 \times 6} = \frac{3\sqrt{6} + 7 \times 2\sqrt{3}}{24} = \frac{3\sqrt{6} + 14\sqrt{3}}{24}$$

- Le dénominateur est une somme ou une différence avec des racines carrées
  On multiplie par l'expression conjuguée pour utiliser le produit remarquable

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{5}{1 + \sqrt{3}} = \frac{5 \times (1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{5 - 5\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{5 - 5\sqrt{3}}{-2} = \frac{-5 + 5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{4 - 5\sqrt{2}} = \frac{(3 + \sqrt{2}) \times (4 + 5\sqrt{2})}{(4 - 5\sqrt{2})(4 + 5\sqrt{2})} = \frac{12 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 10}{16 - 25 \times 2} = \frac{10\sqrt{2} + 22}{16 - 50} = \frac{10\sqrt{2} + 22}{-34}$$

$$= \frac{-5\sqrt{2} - 11}{17}$$

Simplifier les expressions :

$$A = \frac{5}{3 + \sqrt{2}} \qquad B = \frac{5}{\sqrt{7} - 4}$$

$$C = \frac{3 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{8}} \qquad D = \frac{8 + \sqrt{8}}{8}$$

$$E = \sqrt{\frac{42}{25}} \times \sqrt{\frac{40}{28}} \qquad F = \sqrt{\frac{14}{15}} \times \sqrt{\frac{45}{24}} \times \sqrt{\frac{20}{9}}$$

Correction

Exercice 1: Simplifier les expressions

$A = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = \mathbf{4}$

$B = \sqrt{12} = \sqrt{3\times2\times2} = \sqrt{3\times2^2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

$C = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = \mathbf{6}$

$D = \sqrt{20} = \sqrt{5\times2\times2} = \sqrt{5\times2^2} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

$E = \sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{4^2}\times\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$

$F = \sqrt{50} = \sqrt{5\times2\times5} = \sqrt{2\times5^2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

$G = \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = \mathbf{7}$

$H = \sqrt{72} = \sqrt{3^2\times2^2\times2} = 3\times2\sqrt{2} = \mathbf{6\sqrt{2}}$

$I = \sqrt{27} = \sqrt{3\times3\times3} = \sqrt{3\times3^2} = \mathbf{3\sqrt{3}}$

$J = \sqrt{125} = \sqrt{5\times5\times5} = \sqrt{5\times5^2} = \mathbf{5\sqrt{5}}$

$K = \sqrt{80} = \sqrt{2^2\times2^2\times5} = \mathbf{4\sqrt{5}}$

$L = \sqrt{48} = \sqrt{4^2\times3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$

$M = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{5^2}} = \mathbf{\dfrac{9}{5}}$

$N = \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \dfrac{\sqrt{2^2\times2\times3}}{\sqrt{5^2\times2\times3}} = \mathbf{\dfrac{2}{5}}$

Exercice 2: Simplifier

$A = \sqrt{24}\times\sqrt{30} = \sqrt{2^2\times6\times6\times5} = \sqrt{2^2\times6^2\times5} = 2\times6\sqrt{5} = \mathbf{12\sqrt{5}}$

$B = \sqrt{35}\times\sqrt{14} = \sqrt{7\times5\times7\times2} = \sqrt{7^2\times2\times5} = \mathbf{7\sqrt{10}}$

$C = \sqrt{21}\times\sqrt{14}\times\sqrt{50} = \sqrt{3\times7\times7\times2\times5^2\times2} = \sqrt{7^2\times5^2\times2^2\times3} = 7\times5\times2\sqrt{3} = \mathbf{70\sqrt{3}}$

$D = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3^2\times2} = 2\sqrt{2} + 4\times2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = \mathbf{10\sqrt{2}}$

$E = 3\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - 5\sqrt{54} = 3\sqrt{6} + 7\sqrt{2^2\times6} - 5\sqrt{6\times3^2} = 3\sqrt{6} + 14\sqrt{6} - 15\sqrt{6} = \mathbf{2\sqrt{6}}$

$F = 2\sqrt{27} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{8} = 2\sqrt{3\times3^2} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2\times2^2} = 2\times3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\times2\sqrt{2} = 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$

$= \mathbf{\sqrt{3} + 8\sqrt{2}}$

$G = 7\sqrt{12} + 9\sqrt{5} + 8\sqrt{20} - 6\sqrt{27} = 7\sqrt{2^2\times3} + 9\sqrt{5} + 8\sqrt{2^2\times5} - 6\sqrt{3^2\times3}$

$= 14\sqrt{3} + 9\sqrt{5} + 16\sqrt{5} - 18\sqrt{3}$

$\mathbf{= -4\sqrt{3} + 25\sqrt{5}}$

$H = 12\sqrt{8} - 9\sqrt{50} + 7\sqrt{200} + \sqrt{128} = 12\sqrt{2^2\times2} - 9\sqrt{5^2\times2} + 7\sqrt{2\times10^2} + \sqrt{8^2\times2}$

$= 24\sqrt{2} - 45\sqrt{2} + 70\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$

$= \mathbf{57\sqrt{2}}$

$I = 6\sqrt{48} - 9\sqrt{75} + 7\sqrt{45} - 2\sqrt{27} = 6\sqrt{4^2\times3} - 9\sqrt{5^2\times3} + 7\sqrt{3^2\times5} - 2\sqrt{3^2\times3}$

$= 24\sqrt{3} - 45\sqrt{3} + 21\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$

$= \mathbf{-6\sqrt{3}}$

$J = 2\sqrt{8} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{800} + \sqrt{162} = 2\sqrt{2^2\times2} - 5\sqrt{4^2\times2} + 3\sqrt{10^2\times2^2\times2} + \sqrt{2\times9^2}$

$= 4\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 60\sqrt{2} + 9\sqrt{2}$

$= \mathbf{53\sqrt{2}}$

Exercice 3 :

$$A=\frac{5}{3+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5}{3+\sqrt{2}}\times\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}$$
$$=\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$$

$$B=\frac{5}{\sqrt{7}-4}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{7}-4}\times\frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{7}+4}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-4^2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{7-16}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{-9}$$
$$=-\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{9}$$

$$C=\frac{3+\sqrt{2}}{4+\sqrt{8}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{2}}{4+\sqrt{8}}\times\frac{4-\sqrt{8}}{4-\sqrt{8}}$$
$$=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{8}\right)}{4^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}$$
$$=\frac{12-3\sqrt{8}+4\sqrt{2}-\sqrt{16}}{16-8}$$
$$=\frac{8-3\sqrt{8}+4\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{8-3\times2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{8-2\sqrt{2}}{8}=\frac{4-\sqrt{2}}{4}$$

$$D=\frac{8+\sqrt{8}}{8}$$
$$=\frac{2\times4+\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{2\times4}$$
$$=\frac{2\times4+2\times\sqrt{2}}{2\times4}$$
$$=\frac{\boxed{2}\left(4+\sqrt{2}\right)}{\boxed{2}\times4}$$
$$=\frac{4+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{E}=\sqrt{\frac{42}{25}}\times\sqrt{\frac{40}{28}}=\sqrt{\frac{42}{25}\times\frac{40}{28}}=\sqrt{\frac{42\times40}{25\times28}}=\sqrt{\frac{\boxed{7}\times6\times8\times\boxed{5}}{5\times\boxed{5}\times\boxed{7}\times4}}=\sqrt{\frac{2\times3\times2\times\boxed{4}}{5\times\boxed{4}}}=\sqrt{\frac{4\times3}{5}}=\sqrt{4}\times\sqrt{\frac{3}{5}}=2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\text{F}=\sqrt{\frac{14}{15}}\times\sqrt{\frac{45}{24}}\times\sqrt{\frac{20}{9}}=\sqrt{\frac{14\times45\times20}{15\times24\times9}}=\sqrt{\frac{2\times7\times\boxed{9}\times\boxed{5}\times5\times4}{3\times\boxed{5}\times8\times3\times\boxed{9}}}=\sqrt{\frac{\boxed{8}\times7\times5}{3\times\boxed{8}\times3}}=\sqrt{\frac{35}{9}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{35}}{3}$$