

CORRECTION EXERCICES DU LIVRE Page 309

Corrigé exercice 131 :

Partie A :

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]0; +\infty[$, solution de $(E) : xy' - y = x^2 e^{2x}$.

Soit g la fonction définie pour tout $x \in I$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Alors g est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I . Et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = \frac{f'(x) \times x - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x^2 e^{2x}}{x^2} = e^{2x}$. Donc g est solution de l'équation $(E') : y' = e^{2x}$.

2. Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} + k$, où k est un réel, donc, pour tout $x \in I$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}e^{2x} + k$, où k est un réel.

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x}{2}e^{2x} + kx$, avec où k est un réel.

3. On détermine k tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{2 \times \frac{1}{2}} + \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{4} + \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{e}{2}$.

Ainsi la fonction f cherchée est la fonction définie sur I par

$$f(x) = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e}{2}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x.$$

Partie B :

Pour tout $x \geq 0$, posons $h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$.

Alors, pour tout $x \geq 0$, $h(x) = \frac{x}{2}(e^{2x} - e)$ est du signe de $e^{2x} - e$ car $\frac{x}{2} \geq 0$.

$e^{2x} - e \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq e^1 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

En conclusion, $h(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ et $h(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Et $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 132 :

- $(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{10}y + 3$ de solutions définies sur $I = [0; +\infty[$ par $t \mapsto Ce^{-\frac{t}{10}} + 30$, où C est un réel. On détermine C tel que $v(0) = 0 \Leftrightarrow C + 30 = 0 \Leftrightarrow C = -30$. Ainsi,

$$v(t) = 30 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}} \right)$$
 pour tout $t \geq 0$,
- La fonction v est dérivable sur $I = [0; +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonction dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \geq 0$, $v'(t) = 3e^{-\frac{t}{10}} > 0$. Donc v est strictement croissante sur I .
 - Posons $x = -\frac{t}{10}$. On a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = -\infty$. D'où, par limite d'une composée,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{10}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$
 . Donc, par limite d'une somme puis d'un produit,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 30$$
 . La vitesse maximale atteinte par le cycliste est donc de 30 m.s^{-1} .
- On a

$$v'(t) < 0,1 \Leftrightarrow 3e^{-\frac{t}{10}} < 0,1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{10}} < \frac{1}{30} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > -10 \ln\left(\frac{1}{30}\right) \approx 34,01$$
 . Donc au bout de 35 secondes, la vitesse du cycliste sera stabilisée.

Remarque : si le chapitre sur la fonction logarithme népérien n'a pas encore été traité, alors il suffit d'utiliser le tableau de valeurs réalisé à la calculatrice pour déterminer le résultat.

Corrigé exercice 133 :

- Soient y une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $I = [0; 30]$ telle que $y(0) = 0,01$ et z la fonction définie sur I par $z = \frac{1}{y}$. Alors z est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$$
 Donc y est solution de $(E) : y' = 0,05y(10 - y)$ avec $y(0) = 0,01$ si, et seulement si,

$$z'(t) = -\frac{0,05y(t)(10 - y(t))}{(y(t))^2} \Leftrightarrow z'(t) = -0,5 \times \frac{1}{y(t)} + 0,05$$
 pour tout $t \in I$, c'est-à-dire $z'(t) = -0,5z(t) + 0,05$. Et donc si, et seulement si, z est solution de

$$(E') : z' = -0,5z + 0,05$$
 De plus $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 100$. D'où l'équivalence.
- Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur I par $t \mapsto Ce^{-0,5t} + 0,1$, où C est un réel. On détermine C tel que

$$z(0) = 100 \Leftrightarrow C + 0,1 = 100 \Leftrightarrow C = 99,9$$
 . Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$z(t) = 99,9e^{-0,5t} + 0,1$$
 et donc

$$y(t) = \frac{1}{99,9e^{-0,5t} + 0,1}$$
 - $$y(30) = \frac{1}{99,9e^{-0,5 \times 30} + 0,1} \approx 10$$
 donc environ 10 % de la population sera contaminé au bout d'un mois.

Corrigé exercice 134 :

1. Les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{2}y = 10 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y + 10$ sont les fonctions définies sur $I = [0; +\infty[$ par $t \mapsto Ce^{-\frac{t}{2}} + 20$, où C est un réel. On détermine C tel que $f(0) = 220 \Leftrightarrow C + 20 = 220 \Leftrightarrow C = 200$. Ainsi, pour tout $t \in I$,
- $$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

- 2.
- a. La fonction f est dérivable sur I comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $t \in I$, $f'(t) = -100e^{-\frac{t}{2}} < 0$, car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur I .
- b. On pose $x = -\frac{t}{2}$. On a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = -\infty$. Et par limite d'une composée on obtient que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. D'où, par limite d'un produit puis d'une somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 20$ en $+\infty$. La température minimale de l'objet après refroidissement est donc de 20 °C.

- 3.
- a. On obtient la courbe ci-dessous.



- b. On lit graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = 50$. On obtient $t \approx 3,79$. La température de l'objet atteint donc 50 °C au bout d'environ 3 heures et 47 minutes.

Corrigé exercice 135 :

1. $(E') : y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x}$, où C est une constante réelle.
2. La fonction h est de la forme $x \mapsto Ce^{-2x}$, avec $C = \frac{9}{2}$: il s'agit donc bien d'une solution de (E') .
3. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $g'(x) = -3 \times (-3)e^{-3x} = 9e^{-3x}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} + 2 \times (-3e^{-3x}) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}$.
 Donc g est bien solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$. Alors $f = h + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $f'(x) + 2f(x) = h'(x) + g'(x) + 2h(x) + 2g(x) = (h'(x) + 2h(x)) + (g'(x) + 2g(x)) = 3e^{-3x}$
 d'après les questions 2. et 3. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = 3e^{-3x}$ et donc f est également une solution de (E) .

Corrigé exercice 136 :

Par lecture graphique, on constate que la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$ donc sa dérivée f' doit être négative sur $[0; +\infty[$. On en déduit que Γ est la courbe représentative de f' .

Autre méthode : La fonction f est positive puis négative donc ses primitives sont croissantes puis décroissantes, ce qui correspond à l'allure de la fonction $\mathcal{C}$.