FICHE DE REVISIONS 2 Fonctions exponentielle et ln CORRECTION

Exercice 1 :

Amérique du Nord 19 mai 2022 Exercice 2

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\,;\,4]$.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) > 0$.
Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$ à valeurs dans $[-68\,;\,37]$. Or $0 \in [-68\,;\,37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\,;\,4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\,;\,4]$ (car $\forall x \in [-3\,;\,4],\ 1+x^2 \neq 0$).

   $\forall x \in [-3\,;\,4],\ f'(x) = \dfrac{e^x \times (1+x^2) - e^x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2\,e^x}{(1+^2)^2}$.

   b. $f'(x) = 0 \iff \dfrac{(x-1)^2\,e^x}{(1+^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2\,e^x \iff (x-1)^2 \iff x-1=0 \iff x=1$.

   Et $f(1) = \dfrac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{e}{2}$.

2. **a.** Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

   - convexe sur $[-3\,;\,0]$;
   - concave sur $[0\,;\,1]$;
   - convexe sur $[1\,;\,4]$.

   Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x=0$ et $x=1$.

   Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

   b. $\forall x \in [-3\,;\,4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

   Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

   $\forall x \in [-3\,;\,4],\ \left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

   On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   La fonction f'' s'annule et change de signe en $x=\alpha$ et $x=1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

<u>Exercice 2 :</u>

Métropole 8 septembre 2022 Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geqslant 1$:
   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
   b.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   Comme quel que soit x, $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \ln x$:
   - $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x$: $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$;
   - $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x$: $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ ] + \infty[$.
   - $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x$.

   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

3. **a.** D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$, la fonction est strictement croissante de $-\infty$ à $\frac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $f(k) = k$ avec $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ a donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.
   b. D'après le tableau de variations $f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \frac{1}{\mathrm{e}}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. • *initialisation* : $u_0 = 1$ et $u_1 = \mathrm{e}^{u_0} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
On a bien : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.
• *Hérédité*
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
Par croissance de la fonction g :
$g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\mathrm{e})$ soit
$u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant g(\mathrm{e})$
Or $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{4}} \approx 1,97$; donc $g(\mathrm{e}) \leqslant \mathrm{e}$ et l'encadrement précédent devient :
$u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \mathrm{e}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence :
quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.

3. L'encadrement précédent montre :

— que la suite (u_n) est croissante;
— que la suite (u_n) est majorée par e

donc que la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \leqslant \mathrm{e}$.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. Quel que soit $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction logarithme népérien.
Or $\dfrac{x}{4} = \ln x \iff \dfrac{1}{4} = \dfrac{\ln x}{x}$, soit finalement :
$f(x) = \dfrac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,367$ et $\dfrac{1}{4} = 0,25$.
D'après la question **3. a.** de la partie A l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0,346$;
$f(1,4) \approx 0,24$ et $f(1,5) \approx 0,27$, donc $1,4 < \ell < 1,5$;
$f(1,42) \approx 0,247$ et $f(1,43) \approx 0,251$, donc $1,42 < \ell < 1,43$;
$f(1,429) \approx 0,2498$ et $f(1,430) \approx 0,2501$, donc $1,429 < \ell < 1,430$;
Finalement $\ell \approx 1,43$ au centième près.

<u>Exercice 3 :</u>

Métropole 11 mai 2022 Exercice 1

Partie A

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
$f'(t) = 3\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}(+-3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
Donc $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

b. $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
$-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\mathrm{e}^{-5+1} = 30\mathrm{e}^{-4}$.
D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30\mathrm{e}^{-4}$

c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. **a.** Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\ ;\ 6]$. Or $5 \in [0\ ;\ 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha\ ;\ \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie B

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures.
Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.

$u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$ donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.

Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).

$l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$
$= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. $u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \iff 0,7^n \leqslant \dfrac{-0,5}{-4}$

$\iff \ln(0,7^n) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$

Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geqslant 6$.

Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7$^{\text{e}}$ qui correspond à u_6).

Exercice 4 :

Centres étrangers 12 mai 2022 Exercice 2

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

2. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. En utilisant le formule de la dérivée d'un produit, $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

b. $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.

Dans le tableau : $f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) + 1 = -\mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} > 0$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| 1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. $f(1) = 1$. D'après les variations de la fonction f,

- $\forall x \in]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1[$;
- $\forall x \in [\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$.

Donc $\forall x \in]0\,;\,1]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$. Or $1-\mathrm{e}^{-1} > 0$ donc $f(x) \in]\,0;\,1]$ pour tout réel x dans $]0\,;\,1]$.

3. **a.** L'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, on en déduit l'équation de (T) : $y = x - 1 + 1 = x$

b. Nous savons que $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction f' est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, donc f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est toujours au-dessus de toutes ses tangentes. Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (T). Donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant x$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0\,;\,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n.

Initialisation : $u_0 \in]0\,;\,1]$ (par définition).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 1$. Montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

D'après la question **2.c**, $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in]0\,;\,1[$, donc $f(u_n) \in]0\,;\,1[$ soit $u_{n+1} \in]0\,;\,1[$.

Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle au rang suivant $n+1$; d'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

b. D'après la question **3.c**, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.

De plus pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l.

Exercice 5 :

Amérique du sud 26 septembre 2022 Sujet 1 Exercice 3

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)]$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. $g(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - 2\ln(\mathrm{e})) = 1 + \mathrm{e}^2(1-2) = 1 - \mathrm{e}^2$
$\mathrm{e} > 2$ donc $\mathrm{e}^2 > 4$ donc $1 - \mathrm{e}^2 < 0$, et donc $g(\mathrm{e}) < 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1 - 2\ln(x)) = -\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

3. **a.** Pour $x \in]0\,;+\infty[$, on a :
$g'(x) = 2x(1 - 2\ln(x)) + x^2\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.

b. Pour étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on détermine le signe de $g'(x)$ sur cet intervalle.

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g'(x) = -4x\ln(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc la fonction g

- est strictement croissante sur $]0\,;1[$;
- est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$;
- admet en $x = 1$ un maximum égal à $g(1) = 1 + 1^2(1 - \ln(1)) = 2$.

c. On trace le tableau des variations de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. On appelle α cette solution.

d. $\left.\begin{array}{l} g(1) = 2 > 0 \\ g(2) \approx -0,55 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1\,;2]$

$\left.\begin{array}{l} g(1,8) \approx 0,43 > 0 \\ g(1.9) \approx -0,024 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1,8\,;1,9]$

$\left.\begin{array}{l} g(1,89) \approx 0,024 > 0 \\ g(1.90) \approx -0,024 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1,89\,;1,90]$

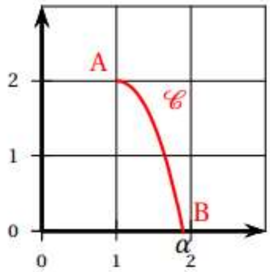
4. On en déduit le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1~;~\alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x)+1]$.
Sur $[1~;~\alpha]$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $\ln(x)+1 > 0$ donc $-4(\ln(x)+1) < 0$.
On en déduit que $g''(x) > 0$ et donc que la fonction g est concave sur $[1~;~\alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.



a. La droite (AB) a pour équation réduite :
$$\frac{y-y_{\text{A}}}{x-x_{\text{A}}} = \frac{y_{\text{B}}-y_{\text{A}}}{x_{\text{B}}-x_{\text{A}}} \iff \frac{y-2}{x-1} = \frac{0-2}{\alpha-1} \iff y = \frac{-2(x-1)}{\alpha-1}+2$$
$$\iff y = \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2}{\alpha-1} + \frac{2\alpha-2}{\alpha-1} \iff y = \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

b. Sur l'intervalle $[1~;~\alpha]$, la fonction est concave, donc sa courbe représentative est située au dessus de toute sécante, donc au dessus du segment [AB].
On en déduit que sur $[1~;~\alpha]$, on a : $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.

Exercice 6 :

Amérique du sud 27 septembre 2022 Sujet 2 Exercice 2

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

1.
- $g(1) = 2\times 0 - 1\times 0 = 0$;
- $g(\text{e}) = 2\times(\text{e}-1) - \text{e}\times\ln\text{e} = 2\text{e}-2-\text{e}\ln\text{e} = \text{e}-2$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+0} g(x) = -2$.

3. g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2\times 1 - \ln x - x\times\dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$.
Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1 - \ln x$:
- $1-\ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln\text{e} > \ln x \iff \text{e} > x$, donc g est croissante sur l'intervalle $]0~;~\text{e}[$;
- $1-\ln x < 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln\text{e} = \ln x \iff \text{e} = x$, donc g est décroissante sur l'intervalle $]\text{e}~;~+\infty[$;
- $1-\ln x = 0 \iff 1 < \ln x \iff \ln\text{e} < \ln x \iff \text{e} < x$, donc $g(\text{e}) = \text{e}-2$ est le maximum de g sur $]0~;~+\infty[$.

D'où le tableau de variations de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	−	
g	‖ -2	↗	$\approx 0,718$	↘	$-\infty$

4.

- Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, la fonction g est dérivable, donc continue; comme $-2 < 0 < \mathrm{e}$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique β de l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, tel que $g(\beta) = 0$. Or de façon évidente $g(1) = 0$, donc $\beta = 1$;
- Sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, la fonction g est dérivable, donc continue; comme $0,718 > 0$, il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$, avec $\alpha \in]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

On a $g(4,9) \approx 0,01$ et $g(5,0) \approx -0,05$, donc $4,9 < \alpha < 5,0$;

$g(4,92) \approx 0,0009$ et $g(4,93) \approx -0,005$, donc $4,92 < \alpha < 4,93$.

5. D'après la question précédente on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

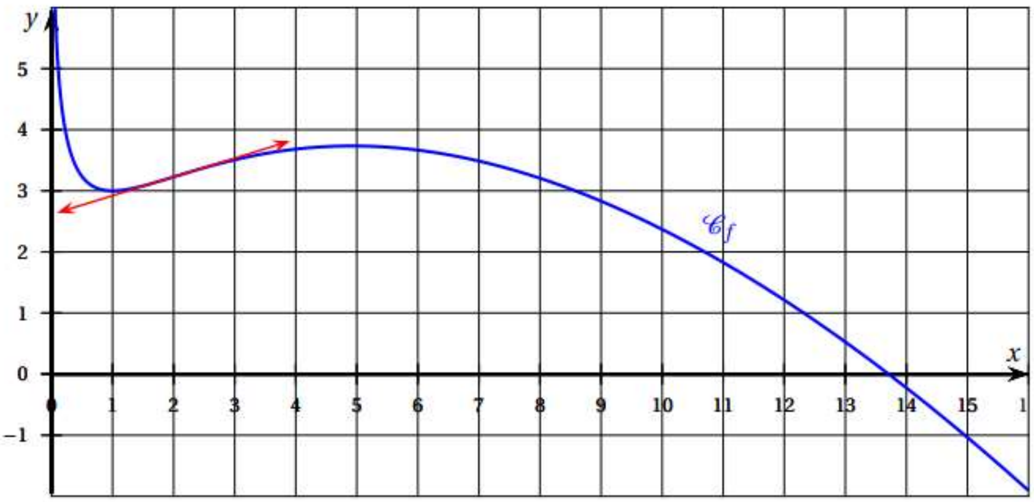
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.



1. On a : $f(x) = x\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right]$;

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right] = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :

$f'(x) = 3 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3 - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln x - 2}{x} = \dfrac{(x-1) - x\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.

Donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$: f est croissante sur cet intervalle;

$f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et sur $]\alpha\,;\,+\infty[$: f est décroissante sur ces deux intervalles : $(f(\alpha) \approx 3,73)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\approx 3,73$	$\searrow$	$-\infty$

3. Comme $x^2 > 0$, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$:

- $2 - x > 0 \iff x < 2$ donc sur $[0; 2]$ la fonction f est convexe;
- $2 - x < 0 \iff x > 2$ donc sur $[2 ; +\infty]$ la fonction f est concave;
- $2 - x = 0 \iff x = 2$ donc le point de coordonnées $(2 ; f(2))$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f(2) = 6 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 6 - 4\ln 2 \approx 3,23$. (voir la figure : la tangente au point d'abscisse 2 traverse la courbe)