Chapitre 5 SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

I. Suites arithmétiques :

1) Exemple :

On donne la suite de nombres : -8 ; -5 ; -2 ; 1 ; 4 ; 7.

Trouver comment passer d'un terme au terme suivant.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3.

On dira que cette suite est arithmétique de raison $r = 3$.

2) Définition :

Une suite est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre . Ce nombre est appelé la raison de la suite et il est noté r .

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \quad \cdots\cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Si (u_n) est une suite arithmétique alors $u_{n+1} = u_n + r$.

3) Propriété :

La suite (u_n) sera arithmétique si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Exemple : On donne la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 5$. Cette suite est-elle arithmétique ?

1) Calculer u_{n+1}.

$u_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 2 + 5 = 2n + 8$.

2) Calculer $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = 2n + 8 - (2n + 5) = 2n + 8 - 2n - 5 = 3$

3) Conclure.

$u_{n+1} - u_n = 3$ donc $u_{n+1} = u_n + 3$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3 donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

4) Sens de variation :

Exemple : 1) On donne la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = -1$. Calculer les trois premiers termes.

$u_0 = -1$; $u_1 = u_0 + 3 = -1 + 3 = 2$; $u_2 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

La valeur des termes augmente car on ajoute 3 à chaque fois, la suite est croissante.

2) On donne la suite définie par $v_{n+1} = v_n - 5$ et $v_0 = 2$. Calculer les trois premiers termes.

$v_0 = 2$; $v_1 = v_0 - 5 = 2 - 5 = -3$; $v_2 = v_1 - 5 = -3 - 5 = -8$

La valeur des termes diminue car on ajoute -5 à chaque fois, la suite est décroissante.

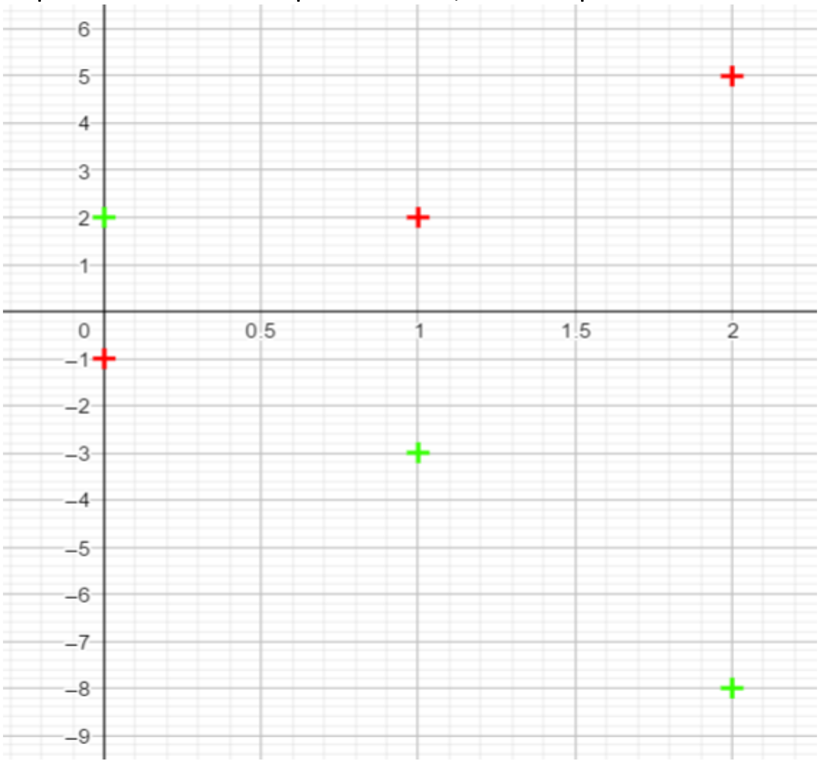
Conclusion : Si r est positive la suite arithmétique est strictement croissante.

Si r est négative la suite arithmétique est strictement décroissante.

Si r est nulle la suite arithmétique est constante.

5) Représentation graphique :

Représenter dans le repère suivant, les trois premiers termes des deux suites précédentes :



En rouge, la suite (u_n)
et en vert (v_n)

II. Suites géométriques :

1) Exemple :

On donne la suite de nombres : -8 ; -4 ; -2 ; -1 ; $-0{,}5$; $-0{,}25$.
Trouver comment passer d'un terme au terme suivant.

On passe d'un terme au suivant en multipliant par $\frac{1}{2}$.

On dira que cette suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

2) Définition :

Une suite est géométrique si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre . Ce nombre est appelé la raison de la suite et il est noté q .

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \quad \cdots\cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Si (u_n) est une suite géométrique alors $u_{n+1} = u_n \times q$.

3) Propriété :

La suite (u_n) sera géométrique si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n.

Exemple : On donne la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$. Cette suite est-elle géométrique ?

1) Calculer u_{n+1}.

$u_{n+1} = 2^{n+1}$

2) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2$$

3) Conclure.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ donc $u_{n+1} = 2\,u_n$

On passe d'un terme au suivant en multipliant par 2
donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 2^0 = 1$.

4) Sens de variation :

Exemple : 1) On donne la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = 2$. Calculer les trois premiers termes.

$u_0 = 2$; $u_1 = 3\,u_0 = 3 \times 2 = 6$; $u_2 = 3\,u_1 = 3 \times 6 = 18$

La suite (u_n) semble croissante.

2) On donne la suite définie par $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ et $v_0 = 2$. Calculer les trois premiers termes.

$v_0 = 2$; $v_1 = \frac{1}{2} \times v_0 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$; $v_2 = \frac{1}{2} \times v_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

La suite (v_n) semble décroissante.

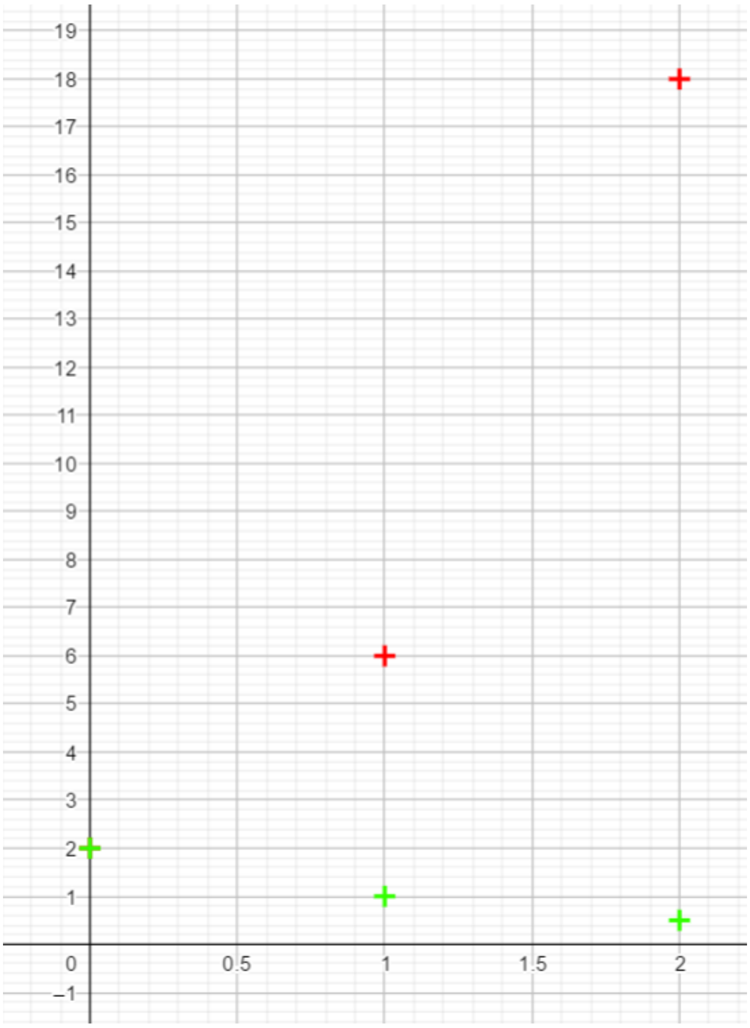
Conclusion : Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ la suite géométrique est strictement croissante.

Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ la suite géométrique est strictement décroissante.

Si $u_0 > 0$ et $q = 1$ la suite géométrique est constante.

5) Représentation graphique :

Représenter dans le repère suivant, les trois premiers termes des deux suites précédentes :



En rouge, la suite (u_n) et en vert (v_n)

Conclusion : Si une suite est géométrique, les points ne sont pas alignés.