TSpé FICHE D'EXERCICES SUR LA FONCTION LN

31 ORAL Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 1$ 2. $e^x = 2$ 3. $e^x = 0$

32 Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les équations suivantes :

1. $\ln(x) = 13$ 2. $\ln(x) = 1$ 3. $\ln(x) = -1$

37 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^x > 3$ 2. $e^{2x} < 7$ 3. $e^x + 1 > 5$

38 Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) \geqslant \ln(3x)$ 2. $1 + 2\ln(x) < 4$ 3. $\ln(x^2+9) > 0$

57 Capacité 1, p. 237

Résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln(5x+1) = \ln(x)$ 2. $3\ln(x) + 2 = 5$
3. $e^{2x-5} = e$ 4. $4e^x - 3 = 9$

58 Capacité 1, p. 237

Résoudre chacune des inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $3\ln(x) < 12$ 2. $6 - 3\ln(x) \geqslant -3$
3. $e^{x-4} > 3$ 4. $4 - 2e^{x-4} > 0$

59 Soit l'équation **(E)** : $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$.

Déterminer les conditions d'existence de cette équation, puis résoudre **(E)**.

60 Soit l'inéquation **(I)** : $\ln(x^2 - 49) > 0$.

Déterminer les conditions d'existence de cette inéquation, puis résoudre **(I)**.

Dans les exercices 61 à 63, déterminer les conditions d'existence puis résoudre les équations données.

61 1. $\ln(9 - x^2) = 0$ 2. $e^{\frac{x}{x+2}} = 3$

62 1. $\ln(2x^2 - 7x + 6) = \ln(10)$ 2. $\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right) = 0$

63 1. $\ln(x^2) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ 2. $\ln(e^{2x} + 1) = 1$

Dans les exercices 64 à 66, déterminer les conditions d'existence puis résoudre les inéquations données.

64 1. $\ln(x-3) > 1$ 2. $\ln(x^2+5) \geqslant \ln(12)$

65 1. $e^{2-x} \leqslant 3$ 2. $e^{x^2-1} > 2$

66 1. $\ln(4x^2 - x) \leqslant \ln(3x)$ 2. $\ln(e^x - 1) \leqslant -1$

77 Soit f la fonction définie sur $[1\,;11]$ par :

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 15\ln(x).$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x}$ pour tout x de $[1\,;11]$.
2. Dresser le tableau de variation de f.

81 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = (2 - \ln x)\ln(x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse e^2.
3. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

82 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^3 + x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

87 On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. a. Étudier la convexité de la fonction f.
b. En déduire que pout tout x appartenant à $]-1\,;+\infty[$:

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

88 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x - lnx$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - lnx$ 3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{lnx}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - 1 + lnx$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)$ 7) $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\left(x^2 - 5x + 2\right)$

Correction fiche exercices fonction ln.

Ex 31 :

1) $e^x = 1 \iff x = \ln 1 = 0 \quad S = \{0\}$.

2) $e^x = 2 \iff x = \ln 2 \quad S = \{\ln 2\}$.

3) $e^x = 0 \quad S = \emptyset$ car $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 32 :

1) $\ln x = 13 \iff x = e^{13} \quad S = \{e^{13}\}$.

2) $\ln x = 1 \iff x = e \quad S = \{e\}$.

3) $\ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad S = \{\frac{1}{e}\}$.

Ex 37 :

1) $e^x > 3 \iff x > \ln 3 \quad S =]\ln 3 ; +\infty[$.

2) $e^{2x} < 7 \iff 2x < \ln 7 \iff x < \frac{\ln 7}{2} \quad S =]-\infty ; \frac{\ln 7}{2}[$.

3) $e^x + 1 > 5 \iff e^x > 4 \iff x > \ln 4 \quad S =]2\ln 2 ; +\infty[$. $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$

Ex 38 :

1) $\ln x \geq \ln(3x) \iff x \geq 3x$ avec $x > 0 \iff \underset{\text{avec } x>0}{2x \leq 0} \iff \underset{\text{avec } x>0}{x \leq 0} \quad S = \emptyset$.

2) $1 + 2\ln x < 4 \iff \ln x < \frac{3}{2}$ avec $x > 0 \iff x < e^{3/2}$ avec $x > 0 \quad S =]0 ; e^{\frac{3}{2}}[$

3) $\ln(x^2 + 9) > 0 \iff x^2 + 9 > 1 \iff x^2 > -8 \quad S = \mathbb{R}$ car $x^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 57 :

1) $\ln(5x+1) = \ln x$

Ensemble de définition :

$5x + 1 > 0$ et $x > 0$

$\iff x > \frac{-1}{5}$

$D_f =]0 ; +\infty[$

Résolution équation :

$\ln(5x+1) = \ln x$

$\iff 5x + 1 = x$

$\iff 4x = -1$

$\iff x = -\frac{1}{4}$ $\quad -\frac{1}{4} \notin D_f$ donc $S = \emptyset$.

2) $3\ln x + 2 = 5$

$D_f =]0 ; +\infty[$.

Résolution de l'équation :

$3\ln x + 2 = 5$

$\ln x = 1$

$x = e \quad S = \{e\}$.

3) $e^{2x-5} = e$

$\iff 2x - 5 = 1$

$\iff x = 3 \quad S = \{3\}$

4) $4e^x - 3 = 9$

$\iff e^x = 3$

$\iff x = \ln 3 \quad S = \{\ln 3\}$.

Ex 58 :

1) $3\ln x < 12$

Ensemble de définition

$D_f =]0;+\infty[$

Résolution :

$3\ln x < 12 \Leftrightarrow \ln x < 4 \Leftrightarrow x < e^4$

$S =]0;e^4[$.

2). $6 - 3\ln x \geq -3$

$D_f =]0;+\infty[$

Résolution :

$6 - 3\ln x \geq -3 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{3}{2}}$

$S =]0; e^{\frac{3}{2}}]$.

3). $e^{x-4} > 3 \Leftrightarrow x-4 > \ln 3$

$\Leftrightarrow x > \ln 3 + 4$

$S =]4+\ln 3;+\infty[$.

4). $4 - 2e^{x-4} > 0 \Leftrightarrow e^{x-4} < 2$

$\Leftrightarrow x-4 < \ln 2$

$\Leftrightarrow x < 4 + \ln 2$

$S =]-\infty; 4+\ln 2[$.

Ex 59 :

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$.

Ensemble de définition :

$-3x > 0$ et $x^2-4 > 0$

$x < 0$ et $x^2 > 4$

$x < 0$ et $x < -2$ ou $x > 2$

$D_f =]-\infty;-2[$.

Résolution :

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

$\Leftrightarrow -3x = x^2-4$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0$

$\Delta = 9+16 = 25$

$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$1 \notin D_f$.

$S = \{-4\}$.

Ex 60 :

$\ln(x^2-49) > 0$

Ensemble de définition :

$x^2-49 > 0$

$x^2 > 49$

$x < -7$ ou $x > 7$.

$D_f =]-\infty;-7[\cup]7;+\infty[$

Résolution :

$\ln(x^2-49) > 0$

$\Leftrightarrow x^2-49 > 1$

$\Leftrightarrow x^2 > 50$

$\Leftrightarrow x < -\sqrt{50}$ ou $x > +\sqrt{50}$

$\Leftrightarrow x < -5\sqrt{2}$ ou $x > 5\sqrt{2}$.

$5\sqrt{2} \simeq 7{,}07$.

$S =]-\infty;-5\sqrt{2}[\cup]5\sqrt{2};+\infty[$.

Ex 61 :

1) $\ln(9-x^2)=0$

Ensemble de définition :

$9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9$

$D_f =]-3;3[$.

Résolution :

$\ln(9-x^2)=0$

$\Leftrightarrow 9-x^2=1$

$\Leftrightarrow +x^2=8$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ou $x=-2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}\simeq 2{,}8$

$S=\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$.

2) $e^{\frac{x}{x+2}}=3$

Ensemble de définition :

$x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Résolution :

$e^{\frac{x}{x+2}}=3$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2}=\ln 3$.

$\Leftrightarrow (\ln 3)(x+2)=x$

$\Leftrightarrow x(\ln 3-1)=-2\ln 3$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\ln 3}{\ln 3-1}$

$S=\left\{\frac{-2\ln 3}{\ln 3-1}\right\}$.

Ex 62 :

$\ln(2x^2-7x+6)=\ln 10$

Ensemble de définition :

$2x^2-7x+6>0$

$\Delta=49-48=1$

$x_1=\frac{7-1}{4}=\frac{3}{2}$

$x_2=\frac{7+1}{4}=2$.

$D_f=]-\infty;\frac{3}{2}[\cup]2;+\infty[$.

Résolution :

$\ln(2x^2-7x+6)=\ln 10$

$\Leftrightarrow 2x^2-7x+6=10$

$\Leftrightarrow 2x^2-7x-4=0$

$\Delta=49+32=81$.

$x_1=\frac{7-9}{4}=\frac{-1}{2}$

$x_2=\frac{7+9}{4}=4$

$S=\{-\frac{1}{2};4\}$.

$\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)=0$

Ensemble de définition :

$\frac{x}{x-2}>0$ $\qquad$ $x-2>0$

$\Leftrightarrow x\geqslant 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\frac{x}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$D_f=]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.

Résolution :

$\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x-2}=1$

$\Leftrightarrow x=x-2$

$\Leftrightarrow 0x=-2$

$S=\emptyset$.

Ex 63 :

1) $\ln x^2 = \ln \frac{1}{x^2}$

Ensemble de définition:

$x^2 > 0$ et $\frac{1}{x^2} > 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 0$.

$Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Résolution:

$\ln x^2 = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \quad x^4 = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$.

$S = \{1\}$.

2) $\ln(e^{2x} + 1) = 1$.

Ensemble de définition:

$e^{2x} + 1 > 0$ or $e^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$Df = \mathbb{R}$

Résolution:

$\ln(e^{2x} + 1) = 1$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 1 = e$

$\Leftrightarrow e^{2x} = e - 1$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(e-1)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(e-1)$

$S = \{\frac{1}{2}\ln(e-1)\}$.

Ex 64 :

1) $\ln(x-3) > 1$

Ensemble de définition.

$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

$Df =]3 ; +\infty[$.

Résolution:

$\ln(x-3) > 1$

$\Leftrightarrow \quad x - 3 > e$

$\Leftrightarrow \quad x > e + 3$

$S =]e+3 ; +\infty[$.

2) $\ln(x^2+5) \geq \ln 12$

Ensemble de définition:

$x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow x^2 > -5$

$Df = \mathbb{R}$.

Résolution:

$\ln(x^2+5) \geq \ln 12$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 5 \geq 12$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 7$

$\Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt{7}$ ou $x \geq \sqrt{7}$.

$S =]-\infty ; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7} ; +\infty[$.

Ex 65:

1) $e^{2-x} \leq 3$

$Df = \mathbb{R}$

Résolution:

$e^{2-x} \leq 3$.

$\Leftrightarrow \quad 2 - x \leq \ln 3$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 2 - \ln 3$.

$S = [2 - \ln 3 ; +\infty[$.

2) $e^{x^2-1} > 2$

$Df = \mathbb{R}$

Résolution:

$e^{x^2-1} > 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 > \ln 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 + \ln 2$.

$\Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{1+\ln 2}$ ou $x > \sqrt{1+\ln 2}$

$S =]-\infty ; -\sqrt{1+\ln 2}[\cup]\sqrt{1+\ln 2} ; +\infty[$.

Ex 66 :

1) $\ln(4x^2 - x) \leq \ln 3x$

Ensemble de définition :

$4x^2 - x > 0$ et $3x > 0$

$x(4x-1) > 0$ $\quad$ $x > 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{4}$

$D_f = \left]\frac{1}{4} ; +\infty\right[$.

Résolution :

$\ln(4x^2 - x) \leq \ln 3x$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2 - x \leq 3x$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4x \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x(x-1) \leq 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

$S = \left]\frac{1}{4} ; 1\right]$.

2) $\ln(e^x - 1) \leq -1$

Ensemble de définition :

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$D_f =]0 ; +\infty[$.

Résolution :

$\ln(e^x - 1) \leq -1$

$\Leftrightarrow \quad e^x - 1 \leq e^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad e^x \leq 1 + \frac{1}{e}$.

$\Leftrightarrow \quad e^x \leq \frac{e+1}{e}$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$.

$S = \left]0 ; \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)\right]$.

Ex 77 :

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 15\ln x$ sur $[1 ; 11]$.

1) $f'(x) = -2 \times 0{,}5x + 2 + 15 \times \frac{1}{x} = -x + 2 + \frac{15}{x} = \frac{-x^2+2x+15}{x}$.

2) Signe de $f'(x)$:

$x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 15$.

$\Delta = 4 + 60 = 64$

$x_1 = \frac{-2-8}{-2} = 5$ et $x_2 = \frac{-2+8}{-2} = -3$.

x	1		5		11
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$ signe de a	
variations de f	$1{,}5$	↗	$-2{,}5+15\ln 5$	↘	$-38{,}5+15\ln 11$

$f(1) = -0{,}5 + 2 + 15\ln 1 = 1{,}5$

$f(5) = -12{,}5 + 10 + 15\ln 5 = -2{,}5 + 15\ln 5$

$f(11) = -60{,}5 + 22 + 15\ln 11 = -38{,}5 + 15\ln 11$

Ex 81 :

$f(x) = (2 - \ln x)\ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

1) $f'(x) = -\frac{1}{x} \times \ln x + (2 - \ln x) \times \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{2 - 2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.

Signe de $f'(x)$: $x > 0 \quad 2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$.

$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$.

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

$f(e) = (2 - \ln e)\ln e = 1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 2 - \ln x = +\infty \end{array}\right\}$ par produit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \ln x = -\infty \end{array}\right\}$ par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2) Equation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $x = e^2$.

$y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$

$f(e^2) = (2 - \ln e^2)\ln e^2 = (2-2)\times 2 = 0$

$f'(e^2) = \dfrac{2 - 2\ln e^2}{e^2} = \dfrac{2-4}{e^2} = \dfrac{-2}{e^2}$

$y = \dfrac{-2}{e^2}(x - e^2) + 0$.

$y = \dfrac{-2}{e^2}x + 2$.

3). Intersection de $\mathscr{C}$ avec axe des abscisses :

$f(x) = 0 \iff (2 - \ln x)\ln x = 0$

$\iff 2 - \ln x = 0$ ou $\ln x = 0$

$\iff \ln x = 2$ ou $x = 1$

$\iff x = e^2$.

$A(e^2; 0)$ et $B(1; 0)$ sont les 2 points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Ex 82 :

$f(x) = (\ln x)^3 + x$ sur $]0; +\infty[$.

1) $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2 + 1$ on utilise $\left((u(x))^3\right)' = 3u'(x)(u(x))^2$

$= \dfrac{3(\ln x)^2}{x} + 1$

$f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2 + x}{x}$

Signe de $f'(x)$ (non demandé) : $3(\ln x)^2 + x > 0$ et $x > 0$
donc $f'(x) > 0$
donc f strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2). Equation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $x = 1$:

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = (\ln 1)^3 + 1 = 1$

$f'(1) = \dfrac{3(\ln 1)^2 + 1}{1} = 1$

$y = 1(x-1) + 1$

$y = x$

3). Position de $\mathscr{C}$ par rapport à (T): on étudie le signe de

$f(x) - x = (\ln x)^3 + x - x = (\ln x)^3$.

si $\ln x < 0 \iff x < e$ donc sur $]0; e[$ $\mathscr{C}$ est au-dessous de (T)
car $f(x) - x < 0 \Rightarrow f(x) < x$

sur $]e; +\infty[$ $\mathscr{C}$ est au-dessus de (T)

$\mathscr{C}$ et (T) se coupent au point $A(e; 1+e)$.

Ex 87 :

$f(x) = \ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$.

1) Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x=0$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $\qquad f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$.

$y = 1x + 0$

$y = x$.

2) a) $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ $\qquad (1+x)^2 > 0$ donc $f''(x) < 0$ sur $]-1;+\infty[$

donc f est concave sur $]-1;+\infty[$.

b). Toute fonction concave sur un intervalle possède une courbe représentative située au-dessous de ses tangentes sur cet intervalle.

Donc $f(x) \leq x$ sur $]-1;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$ sur $]-1;+\infty[$.

Ex 88 :

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty\end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} x - \ln x = +\infty$

2) $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0\end{array}\right\} \text{par différence } \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1\end{array}\right\}$ par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x = +\infty$.

3) $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\}$ par produit $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 1 + \ln x = +\infty$.

5) Posons $X = 1 + \sqrt{1+x^2}$ et $U = 1+x^2$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{U \to +\infty} \sqrt{U} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$.
par composition

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \sqrt{1+x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) = +\infty.$$

6) De même $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \sqrt{1+x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) = +\infty$.

7). Posons $X = x^2 - 5x + 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 5x + 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 - 5x + 2\right) = +\infty$.