

FICHE DE REVISIONS 2 Fonctions exponentielle et ln

Temps : environ 1h par exercice

Exercice 1 :

Amérique du Nord 19 mai 2022 Exercice 2

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

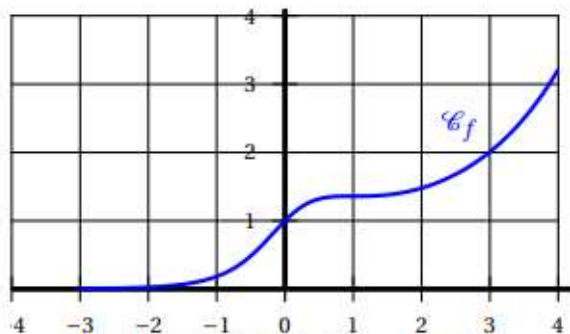
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1.
 - a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
 - b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathcal{C}_f$



Vue de profil du toboggan

- a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations? Argumenter.
- b. On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations? ». Justifier.

Exercice 2 :**Métropole 8 septembre 2022 Exercice 3****Partie A**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
 - b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

- c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
3. Soit k un nombre réel positif ou nul.
 - a. Montrer que, si $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; e]$.
 - b. Si $k > \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}} \text{ c'est-à-dire : } u_{n+1} = g(u_n).$$

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n) .

Exercice 3 :

Métropole 11 mai 2022 Exercice 1

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$f(t) = 3te^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1.
 - a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.
 - b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.
 - c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
Quelle est alors cette quantité maximale ?
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$ notée α , dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β , et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.
 - b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n -ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 , de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
 - c. Déterminer la valeur de ℓ . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 6 - u_n$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
 - b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 - c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 4 :

Centres étrangers 12 mai 2022 Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et les limites.
- c. Justifier que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \in]0; 1[$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 5 :

Amérique du sud 26 septembre 2022 Sujet 1 Exercice 3

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

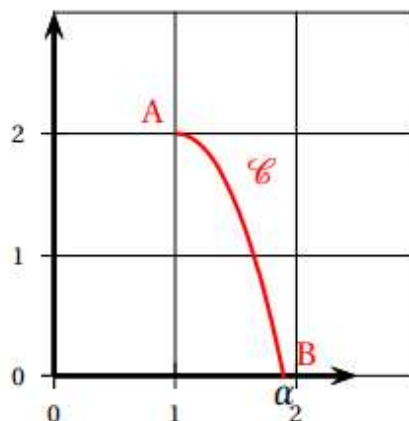
PARTIE A

1. Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
3.
 - a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Dédurre de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α .
 - a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
 - b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$,

$$g(x) \geq \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$



Exercice 6 :

Amérique du sud 27 septembre 2022 Sujet 2 Exercice 2

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x \ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0; +\infty[$:
 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e; +\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0; +\infty[$.

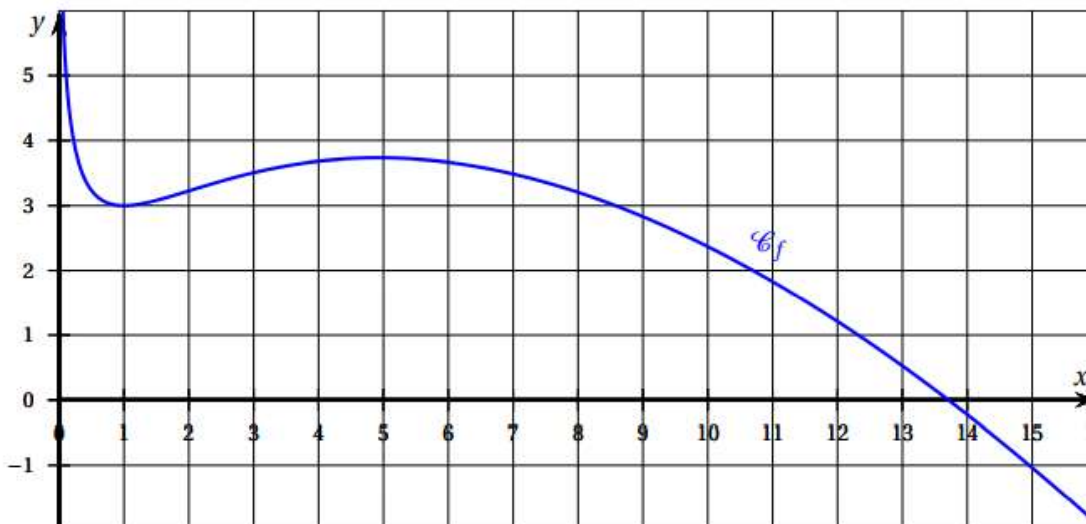
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f .

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2.
 - a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 - b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$.
Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.