TSpé Fiche d'exercices : Détermination de limites

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 - 3x + 1}{4x^2 + 5}$

2) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{2x^3 - 2x}{2x - 10}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \cos(x)}{x^2 + 2}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 3x^2 + 1}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{x}$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 1}{2x^2 + 5}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x+7} - e^7}{x}$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x + 2}$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x + 2\,e^x - 5}{e^{2x} - 3}$

10) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 \ln(x) - 5x}{x}$

11) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln(x) - x^2 + 3x}{x}$

12) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$

Correction fiche sur les limites

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2-3x+1}{4x^2+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to5^-} 2x^3-2x = 240$
$\lim\limits_{x\to5^-} 2x-10 = 0^-$
par quotient $\lim\limits_{x\to5^-} \dfrac{2x^3-2x}{2x-10} = -\infty$.

$x<5 \Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow 2x-10<0$

3) $-1 \leq \cos x \leq 1$

$3x-1 \leq 3x+\cos x \leq 3x+1$

$\dfrac{3x-1}{x^2+2} \leq \dfrac{3x+\cos x}{x^2+2} \leq \dfrac{3x+1}{x^2+2}$ car $x^2+2>0$ sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+\cos x}{x^2+2} = 0$

4). $\dfrac{e^x-3x^2+1}{x^2} = \dfrac{e^x}{x^2} - 3 + \dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} -3 = -3$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-3x^2+1}{x^2} = +\infty$.

5). On utilise la définition du nombre dérivé de la fonction $\cos(2x)$.

$\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\cos(0+2h)-\cos 0}{2h} = (\cos(2x))'(0) = -2\sin(0) = 0$.

Or $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\cos(0+2h)-\cos 0}{2h} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x} \times \dfrac{1}{2}$

$0 = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 2x - 1}{x}$

$0 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+1}{2x^2+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$.

②

7) On utilise la définition du nombre dérivé de la fonction e^{2x}

$$\frac{e^{2x+7}-e^7}{x}=\frac{e^7(e^{2x}-1)}{x}=e^7\times\frac{e^{2x}-1}{x}=e^7\left(\frac{e^{0+2x}-e^0}{2x}\times 2\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{0+2x}-e^0}{2x}=\lim_{X\to 0}\frac{e^{0+X}-e^0}{X}=e^0=1.$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x+7}-e^7}{x}=2e^7.$

8) $-1\leq \sin x\leq 1$

$x-1\leq x+\sin x\leq x+1$

$\frac{x-1}{x+2}\geq\frac{x+\sin x}{x+2}\geq\frac{x+1}{x+2}$ car si $x\to-\infty$ $x+2<0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sin x}{x+2}=1.$

9) $\frac{xe^x+2e^x-5}{e^{2x}-3}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}2e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-5=-5\end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x+2e^x-5=-5$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0.\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-3=-3\end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-3=-3$

par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^{2x}-3}=\frac{5}{3}.$

10). $\frac{x^2\ln x-5x}{x}=\frac{x^2\ln x}{x}-\frac{5x}{x}=x\ln x-5$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}-5=-5\end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2\ln x-5x}{x}=-5.$

11) $\dfrac{3\ln x - x^2 + 3x}{x} = 3\dfrac{\ln x}{x} - x + 3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 3\dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3 \end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln x - x^2 + 3x}{x} = -\infty$

12) $3x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 96 = 100$ $\quad x_1 = \dfrac{2-10}{6} = \dfrac{-4}{3}$ et $x_2 = \dfrac{2+10}{6} = 2$.

donc $3x^2 - 2x - 8$ peut se factoriser et on a :

$3x^2 - 2x - 8 = 3(x-2)\left(x + \frac{4}{3}\right)$ $\qquad a(x-x_1)(x-x_2)$.

d'où $\dfrac{3x^2 - 2x - 8}{x-2} = \dfrac{3(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)}{x-2} = 3\left(x + \frac{4}{3}\right) = 3x + 4$.

$\lim\limits_{x\to 2} 3x + 4 = 10$ donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 2x - 8}{x-2} = 10$.