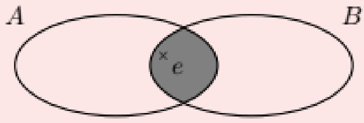
1SPE CHAPITRE 11 VARIABLES ALEATOIRES

I. Quelques rappels :

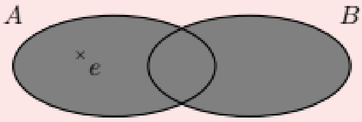
1) Le vocabulaire des ensembles :

Définition (Intersection).
L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



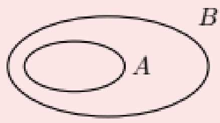
Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.
Remarque.
Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition (Réunion).
La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



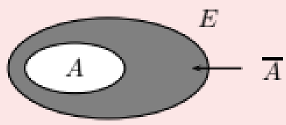
Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition (Inclusion).
On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$ (« A inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »).



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.
Remarque.
$\emptyset$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).
On notera $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

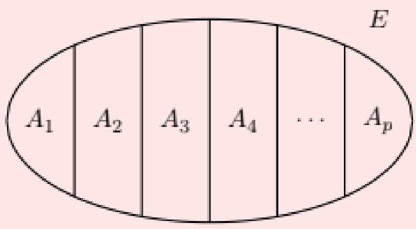
Définition (Complémentaire).
Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque.
$A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Définition.
Des parties A_1, A_2, …, A_p d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E. Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1 ; \dots ; p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = E$.



Propriété.

Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors A et $\overline{A}$ constituent une partition de E.

2) Le vocabulaire des probabilités :

Issues, expérience aléatoire, univers :

Définition.

L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

Dans ce chapitre, Ω sera toujours un ensemble fini.

Evénement élémentaire :

Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'une seule issue.

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de Ω fait 1.

Probabilité de l' événement contraire :

On notera $\overline{A}$ l'événement contraire de A. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Probabilité de la réunion de deux événements :

A et B sont deux événements de Ω. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3) L'équiprobabilité :

Définition.

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Probabilité d'un événement :

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité de l'événement A se calcule avec la formule

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

4) La loi des grands nombres :

Définition.

Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω_i donnée le nombre : $f_i = \dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres* ; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème (Loi des grands nombres).

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Remarques.

- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

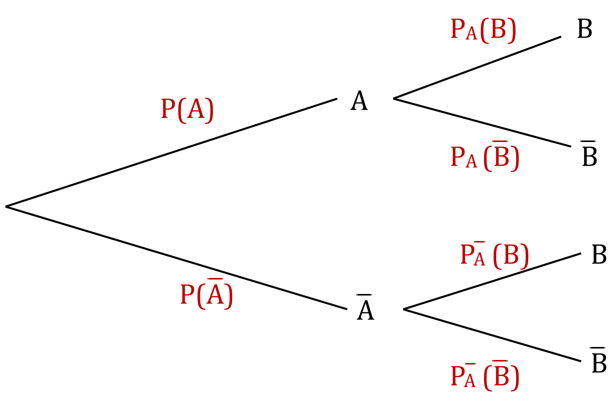
5) Les arbres de probabilités :

a) Règles de construction d'un arbre pondéré :

Dans un arbre :

- **la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même point vaut 1.**
- **la probabilité d'un événement est égale au produit des probabilités portées par les branches qui aboutissent à cet événement.**

b) Arbre pondéré :



$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$P(\bar{B}) = P(\bar{B} \cap A) + P(\bar{B} \cap \bar{A})$

II. LES VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

1) Exemple :

On lance deux dés équilibrés, dont les faces portent les nombres de 1 à 6.

On note les résultats obtenus et on les additionne.

On note X la variable qui sera égale à la somme obtenue.

a) Déterminer tous les résultats possibles pour X.

(on présentera les résultats dans un tableau à double-entrée).

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On voit qu'il y a 36 cas possibles.

Toutes les issues ne sont pas équiprobables.

On obtient en effet plus souvent le 6 que le 3.

L'ensemble de toutes les valeurs de X, est : { 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 }

b) Calculer $P(X = 2) = \frac{1}{36}$ $\quad P(X = 3) = \frac{2}{36}$ $\quad P(X = 6) = \frac{5}{36}$

On regroupe tous les résultats dans un tableau :

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	TOTAL
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

On dit alors que l'on a définit **la loi de probabilité** de **la variable aléatoire X**.

c) Calculer la moyenne pondérée des valeurs de X.

Cette moyenne se note E(X) et s'appelle l'espérance de X.

$$E(X) = \frac{1}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 3 + \frac{3}{36} \times 4 + \frac{4}{36} \times 5 + \frac{5}{36} \times 6 + \frac{6}{36} \times 7 + \frac{5}{36} \times 8 + \frac{4}{36} \times 9 + \frac{3}{36} \times 10 + \frac{2}{36} \times 11 + \frac{1}{36} \times 12$$

$E(X) = 7$

7 est la valeur que l'on pourra espérer pour X si l'on joue très longtemps.

2) Définition :

Lors d'une expérience aléatoire, on obtient un certain nombre d'issues.

Lorsqu'à chaque issue, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Cette variable aléatoire est en général notée X .

Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est calculer, pour chaque valeur possible de X, la probabilité de l'obtenir.

On regroupera les résultats dans un tableau de ce type :

$X = x_i$	x_1	x_2	…	…	…	x_n	TOTAL
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…	…	…	$P(X = x_n)$	1

L'espérance de la variable aléatoire X est notée E(X) et elle vaut :

$E(X) = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + \ldots. + P(X = x_n) \times x_n$

Elle représente la moyenne pondérée des valeurs de la variable aléatoire X.

Elle représente la valeur que l'on espérera obtenir pour X après un très grand nombre d'expériences.

3) Espérance, variance et écart-type :

L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X , sont respectivement les nombres notés E(X) , Var(X) et σ(X) définis par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i^2 \right) - (E(X))^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété.

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(x)$.
Soit Y une nouvelle variable aléatoire telle que $Y = aX + b$ où a et b sont des réels quelconque.
Alors $E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2 V(X)$.

4) Exemple :

Dans une fête foraine, un jeu consiste à faire tourner une roue partagée en 8 secteurs égaux: un de couleur rouge, trois de couleur verte et quatre de couleur bleue.
Pour faire tourner la roue, il faut payer 1€.

Si le bleu sort, on ne gagne rien.
Si le vert sort, on gagne 2€.
Si le rouge sort, on gagne 5€.

On définit sur l'univers Ω = { bleu, vert, rouge } une variable aléatoire X, qui, à chaque couleur, associe le gain engendré.

1) Définir la loi de probabilité de X :

les gains x_i	-1	1	4	TOTAL
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}=1$

$P(X = -1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ car la probabilité de perdre 1€ est la probabilité de tomber sur le bleu.

$P(X = 1) = \frac{3}{8}$ car la probabilité de gagner 1€ est la probabilité de tomber sur le vert.

$P(X = 4) = \frac{1}{8}$ car la probabilité de gagner 4€ est la probabilité de tomber sur le rouge.

2) Calculer le gain moyen par partie.

$E(X) = \frac{4}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{8} = 0{,}375.$

On peut espérer gagner en moyenne 3,75€ par partie.

3) Calculer l'écart-type et commenter.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et $V(X) = \frac{4}{8} \times (-1)^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{175}{64}$

donc $\sigma(X) = \sqrt{\frac{175}{64}} \approx 1{,}654$

Une grande partie des gains du joueur (environ 70%) sera dans l'intervalle

$\left[\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{175}{64}} ; \frac{3}{8} + \sqrt{\frac{175}{64}}\right]$ soit entre $-1{,}28$€ et $2{,}03$€.

L'écart-type représente donc le risque pris par le joueur.

4) La partie coute maintenant 4€. On appelle Y la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.

Quelle relation y-a-t-il entre X et Y ?

Si la partie coute 3€ de plus, les gains diminueront de 3€ donc $Y = X - 3$

En déduire E(Y) à partir de $E(X)$ et $\sigma(Y)$ en fonction de $\sigma(X)$.

$E(Y) = E(X) - 3 = \frac{3}{8} - 3 = -\frac{21}{8} = -2{,}625.$ $\quad Var(Y) = 1^2 \times Var(X) = Var(X)$ donc $\sigma(Y) = \sigma(X)$