

LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition et conséquences :

1) Définition :

On connaît le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de e^x		
variations de e^x		

Soit a un réel strictement positif.

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et } a \in]0 ; +\infty [.$$

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel α tel que $e^\alpha = a$.

Ce réel α sera appelé logarithme népérien de a .

Conclusion : $e^x = a$ avec $a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a$.

Exemples : $e^x = 1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ Or $e^0 = \dots\dots\dots$ donc $\dots\dots\dots$
 $e^x = e \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ Or $e = \dots\dots\dots$ donc $\dots\dots\dots$

2) Conséquences algébriques :

$$e^x = a \text{ avec } a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a \text{ donc } a = \dots\dots\dots \text{ et } x = \dots\dots\dots$$

On en déduit que :

$$e^{\ln x} = x \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } \ln(e^x) = x \text{ pour tout réel } x .$$

Exemples : 1) Résoudre dans \mathbb{R} $e^{6-3x} = 8$.

2) Résoudre dans \mathbb{R} $e^{2x+7} = -5$

3) Résoudre dans \mathbb{R} $e^{2x} - 3e^x + 1 > 0$

II. Etude de la fonction ln:

1) Définition de la fonction logarithme népérien :

On appelle fonction logarithme népérien la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} , telle que $f(x) = \ln x$.

2) Dérivabilité et continuité de la fonction ln:

La fonction **ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.**

Toute fonction dérivable étant continue, **la fonction ln sera continue sur $]0 ; +\infty[$.**

De plus $x = e^{\ln x}$ pour $x > 0$ donc $(x)' = (e^{\ln x})'$ donc $1 = (\ln x)' e^{\ln x}$ donc $1 = (\ln x)' \times x$
donc **$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.**

3) Sens de variation :

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ donc $(\ln x)' > 0$

donc la fonction **ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.**

x	0	$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$		+
variations de la fonction ln		

4) Limites de la fonction ln :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ (admise) b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ (admise)

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Démonstration :

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour n entier naturel, $n > 0$

Démonstration :

5) Signe de la fonction ln :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$			
Signe de $\ln(x)$			

La fonction \ln est strictement sur $]0 ; +\infty[$ et s'annule pour $x = 1$

donc

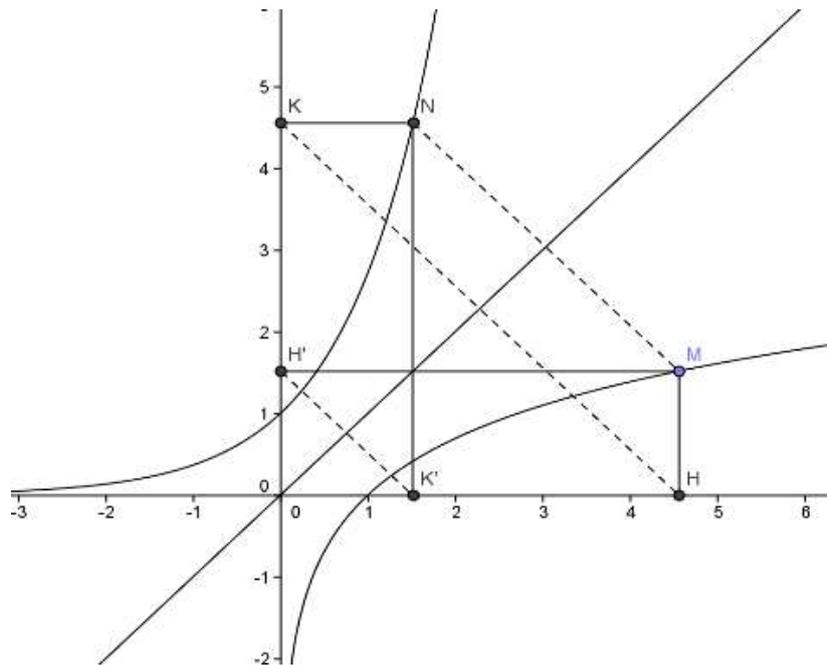
$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0 ; 1[$$

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1 ; +\infty[$$

6) Conséquences graphiques :

a) Dans un repère orthonormal, la courbe de la fonction \ln et celle de la fonction \exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première diagonale).



b) On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc

c) $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \dots\dots\dots$ et $f''(x) = \dots\dots\dots$ donc $f''(x) \dots\dots\dots$

donc f est $\dots\dots\dots$ sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0 ; +\infty[$.

III. Relations fonctionnelles de la fonction ln:

Elles découlent des propriétés de la fonction exponentielle.

1) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln(a b) = \ln a + \ln b$.**

2) **Pour tout $a > 0$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.**

3) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$**

4) **Pour tout $a > 0$ et n entier relatif, $\ln(a^n) = n \ln a$.**

5) **Pour tout $a > 0$ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$**

IV. Etude de la fonction $\ln(u(x))$:

1) Ensemble de définition:

$\ln(u(x))$ n'existe que si $u(x) > 0$ donc

Pour trouver l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u(x))$

il faut résoudre l'inéquation $u(x) > 0$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u(x))$.

Exemple : Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

2) Dérivée de la fonction $\ln(u(x))$:

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\ln(u(x))$ est

dérivable sur I et on a :
$$[\ln(u(x))] ' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple : Etudier sur $] -\infty ; \frac{3}{5} [$ la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

Calcul de la dérivée :

Signe de $f'(x)$:

Remarque : La fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$ a les mêmes variations que la fonction u .

Tableau de variations :

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

Limites :

3) Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction ln:

La fonction \ln étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ on a :

Si $x > 0$ et si $y > 0$

$\ln x = \ln y \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$\ln x > \ln y \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Exemples :

1) Résoudre $\ln(2x - 3) = \ln(5 - x)$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'équation :

On résout ensuite l'équation de départ :

Il faut ensuite vérifier que la solution est dans l'ensemble de définition

2) Résoudre $\ln\left(\frac{1}{3}x - 5\right) \leq 2$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation :

On résout ensuite l'inéquation de départ :

Il faut ensuite prendre uniquement les solutions qui sont dans l'ensemble de définition

3) Déterminer les entiers naturels n tels que $0,5^n \leq 0,003$