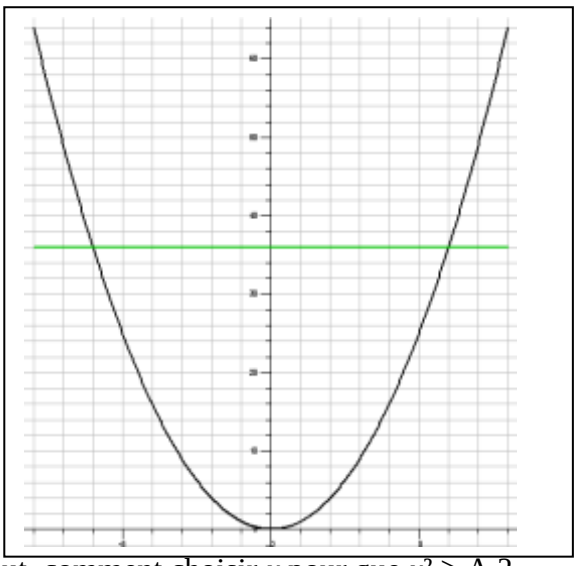
Chapitre 6

COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES
LIMITES D'UNE FONCTION

Afin d'étudier de manière plus complète le comportement global d'une fonction, on est amené à se prononcer sur les évolutions des valeurs de cette fonction lorsque la variable se rapproche des bords de l'intervalle de définition.

I. Observation des fonctions de référence :



1) Fonctions puissance : $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

a) La fonction carré : $x \longmapsto x^2$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$

Résoudre $x^2 \geq 36$ et interpréter graphiquement le résultat

$x^2 \geq 36 \Leftrightarrow x \leq -6$ ou $x \geq 6 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-6] \cup [6\,;+\infty[$.
Graphiquement , les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés au-dessus ou sur la droite horizontale d'équation y = 36.
On lit $S =]-\infty\,;-6] \cup [6\,;+\infty[$.

Résoudre $x^2 \geq 10^4$. *$S =]-\infty\,;-10^2] \cup [10^2\,;+\infty[$*

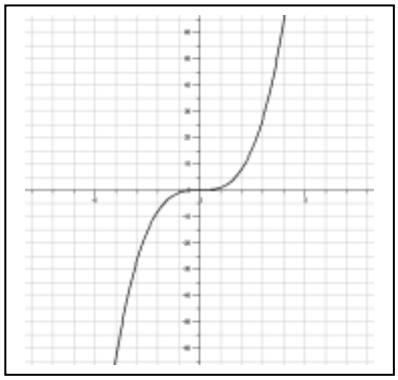
Résoudre $x^2 \geq 10^{40}$. *$S =]-\infty\,;-10^{20}] \cup [10^{20}\,;+\infty[$*

De façon générale, si A est un réel positif aussi grand que l'on veut, comment choisir x pour que $x^2 \geq A$?

$x \in]-\infty\,;-\sqrt{A}] \cup [\sqrt{A}\,;+\infty[$. Pour que x^2 soit supérieur à A , nombre positif aussi grand que l'on veut , il faut que x soit très grand ou très petit.

Quand x devient aussi grand que l'on veut , on dit que x tend vers $+\infty$ et on note $x \longrightarrow +\infty$.
Quand x devient aussi petit que l'on veut , on dit que x tend vers $-\infty$ et on note $x \longrightarrow -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.



b) La fonction cube : $x \longmapsto x^3$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$

Quand x tend vers $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

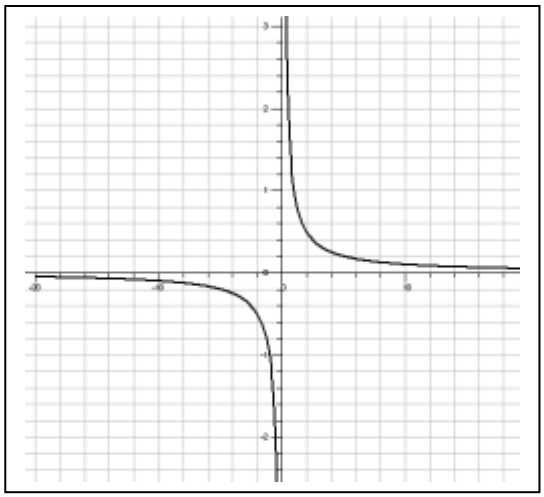
c) Généralisation : $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$:

Si n est pair , la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^n$ ressemble à celle de x^2.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.

Si n est impair , la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^n$ ressemble à celle de x^3.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.



2) Fonctions inverse : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

$D_f =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$

Calculer f(10) ; f (100) ; f (10^6).

$f(10) = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$; $f(100) = \dfrac{1}{100} = 10^{-2}$; $f(10^6) = 10^{-6}$

Quand x devient grand , $\dfrac{1}{x}$ devient petit , il se rapproche de 0.

Résoudre $\dfrac{1}{x} \leq 10^{-5}$:

$\dfrac{1}{x} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow x \geq 10^{5}$ *car la fonction inverse est décroissante donc elle perturbe l'ordre.*

De façon générale, si A est un réel positif aussi petit que l'on veut, comment choisir x pour que $\dfrac{1}{x} \leq$ A ?

$\dfrac{1}{x} \leq A \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{A}$ Si A est aussi petit que l'on veut en restant positif , $\dfrac{1}{A}$ est aussi grand que l'on veut .

Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, en restant positif. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$.

De même, quand x tend vers $-\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, en restant négatif. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$.

Que se passe-t-il quand x se rapproche de 0 ?

- ✓ Quand x est aussi près que l'on veut de 0 , en restant positif , $\dfrac{1}{x}$ devient aussi grand que l'on veut.

  On notera $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$

- ✓ Quand x est aussi près que l'on veut de 0 , en restant négatif , $\dfrac{1}{x}$ devient aussi petit que l'on veut.

  On notera $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$

II. Limite d'une fonction en l'infini :

1) Limite infinie en l'infini :

a) Définition :

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] A ; $+\infty$ [avec A un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand.
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même dire qu'une fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] $-\infty$; A [avec A un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] A ; $+\infty$ [avec A un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez petit.
On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Dire qu'une fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] $-\infty$; A [avec A un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez petit.
On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Exemple de rédaction avec la fonction carré :

¤ Pour la limite en + ∞ :

On choisit un réel A aussi grand que l'on veut. On cherche alors $x > 0$ tel que $f(x) > A$.

$f(x) > A \Leftrightarrow x^2 > A \Leftrightarrow x > \sqrt{A}$ si $x > 0$

donc si $x > \sqrt{A}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle] A ; + ∞ [donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

¤Pour la limite en – ∞ :

On choisit un réel A aussi grand que l'on veut. On cherche alors $x < 0$ tel que $f(x) > A$.

$f(x) > A \Leftrightarrow x^2 > A \Leftrightarrow x < -\sqrt{A}$ si $x < 0$

donc si $x < -\sqrt{A}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle] A ; + ∞ [donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

.

c) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$

n est un entier naturel.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

2) Limite finie ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$ en l'infini :

a) Définition :

Dire qu'une fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ en + ∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

De même dire qu'une fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ en – ∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit. On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

b) Exemple de rédaction avec la fonction inverse :

¤Pour la limite en + ∞ :

On choisit un intervalle] – α ; α [avec α un réel positif. On cherche alors $x > 0$ tel que $-\alpha < f(x) < \alpha$.

$-\alpha < f(x) < \alpha \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{x} < \alpha$ donc $x > \dfrac{1}{\alpha}$

donc si $x > \dfrac{1}{\alpha}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle] – α ; α [donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

¤Pour la limite en – ∞ :

On choisit un intervalle] – α ; α [avec α un réel positif. On cherche alors $x < 0$ tel que $-\alpha < f(x) < \alpha$.

$-\alpha < f(x) < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \dfrac{1}{x} < 0$ donc $x < -\dfrac{1}{\alpha}$

donc si $x < -\dfrac{1}{\alpha}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle] – α ; α [donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

c) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$

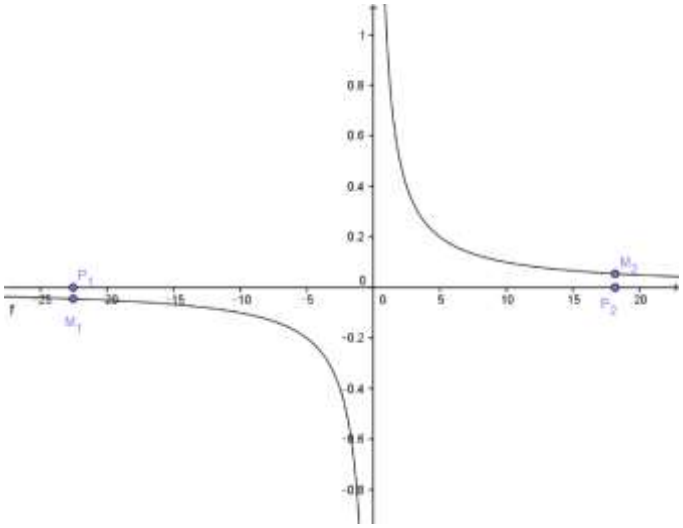
d) Conséquences graphiques :

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ on dira que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ on dira que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Cela signifie que si un point M (x ; $f(x)$) appartient à la courbe représentative de f et si P(x ; ℓ) est un point de la droite $y = \ell$ alors la distance MP tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exemple avec la fonction inverse :



Méthode: Pour étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote d'équation $y = \ell$, on étudie le signe de la différence $f(x) - \ell$.

Si $f(x) - \ell > 0$ la courbe sera au-dessus de l'asymptote.
Si $f(x) - \ell < 0$ la courbe sera au-dessous de l'asymptote.

Pour la fonction inverse, l'asymptote est $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$f(x) - 0 = \frac{1}{x}$.

Si $x > 0$ $f(x) - 0 > 0$ donc la courbe est au–dessus de l'asymptote sur $]\,0\,;+\infty\,[$
Si $x < 0$ $f(x) - 0 < 0$ donc la courbe est au–dessous de l'asymptote sur $]-\infty\,;0\,[$

III. Limite d'une fonction en une valeur finie a :

1) La valeur finie a est aux extrémités et à l'extérieur du domaine de définition (valeur interdite) :

a) Définition :

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ comme limite en a par valeurs supérieures signifie que tout intervalle $]A ; +\infty[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x > a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = +\infty$. On dira aussi limite à droite en a.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ comme limite en a par valeurs supérieures signifie que tout intervalle $]-\infty ; A[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x > a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = -\infty$.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ comme limite en a par valeurs inférieures signifie que tout intervalle $]A ; +\infty[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x < a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x) = +\infty$. On dira aussi limite à gauche en a.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ comme limite en a par valeurs inférieures signifie que tout intervalle $]-\infty ; A[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x < a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x) = -\infty$.

b) Exemple de rédaction avec la fonction inverse :

- Pour la limite en 0 par valeurs supérieures :

  On choisit un intervalle $]A ; +\infty[$ avec A un réel positif.
  On cherche alors $x > 0$ tel que $f(x) > A$.

  $f(x) > A \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > A$ donc $x < \dfrac{1}{A}$

  donc si $0 < x < \dfrac{1}{A}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]A ; +\infty[$

  donc $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$

- Pour la limite en 0 par valeurs inférieures :

  On choisit un intervalle $]-\infty ; A[$ avec A un réel négatif.
  On cherche alors $x < 0$ tel que $f(x) < A$.

  $f(x) < A \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < A$ donc $0 > x > \dfrac{1}{A}$

  donc si $\dfrac{1}{A} < x < 0$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty ; A[$

  donc $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$

c) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

si $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ si n est impair

$\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair

d) Conséquences graphiques :

Si $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (à droite ou à gauche) on dira que la droite verticale d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a.

2) La valeur finie a est à l'intérieur du domaine de définition :

Dans ce cas, la recherche d'une limite est dénuée de tout intérêt.
Si a est une valeur du domaine de définition, on posera $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

IV. Opérations sur les limites :

Pour calculer une limite d'une fonction, on peut utiliser les définitions (avec les intervalles), mais c'est long et peu pratique ; donc on préfère utiliser les limites des fonctions de référence, les opérations à partir de ces fonctions de référence et les techniques de comparaison

a représente soit un réel , soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1) Somme de deux fonctions :

$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$ / $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I**
$+\infty$	$+\infty$	**F.I**	$+\infty$

2) Produit de deux fonctions :

$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$ / $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	0
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**
0	0	**F.I**	**F.I**	0

3) Inverse d'une fonction :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$ si $f(x) > 0$ $-\infty$ si $f(x) < 0$

4) Quotient de deux fonctions : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$ / $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^- si $\ell > 0$ 0^+ si $\ell < 0$	0^+ si $\ell > 0$ 0^- si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	**F.I**	**F.I**	$-\infty$ si $g(x) > 0$ $+\infty$ si $g(x) < 0$
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	**F.I**	**F.I**	$-\infty$ si $g(x) < 0$ $+\infty$ si $g(x) > 0$
0	0	0	0	**F.I**

5) Formes indéterminées :

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

6) Limites d'une fonction polynôme en + ∞ ou – ∞ :

Pour lever une indétermination, on factorise le terme de plus haut degré.

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$

$$5x^3 - 2x^2 + 4 = 5x^3 \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} \right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{5x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{5x^3} = 0$

Par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty$

Par produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} \right) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = +\infty$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty$

Par produit

$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} \right) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = -\infty$

Théorème : La limite d'une fonction polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré.

Rédaction : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = \lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty$

7) Limite d'une fonction rationnelle :

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5}$ pour $x \neq -\frac{5}{4}$

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5} = \frac{2x \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} \right)}{2x \left(2 + \frac{5}{2x} \right)} = \frac{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}}{2 + \frac{5}{2x}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \frac{3}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$

Par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{2x} = 0$

Par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{5}{2x} = 2$

Par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}}{2 + \frac{5}{2x}} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5} = +\infty$

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x+1}{2x^2-3x+1}$ pour $x \in D_f$ (à déterminer)

Domaine de définition : $2x^2 - 3x + 1 \neq 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad x_1 = 1 \; ; \; x_2 = \dfrac{1}{2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{ 1 \; ; \dfrac{1}{2} \}$

$$\frac{4x+1}{2x^2-3x+1} = \frac{2x\left(2+\frac{1}{2x}\right)}{2x\left(x-\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{2x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{2x}}{x-\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{2x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \dfrac{1}{2x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x - \dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1}{2x} = -\infty \end{array}\right\}$$

Par quotient

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x+1}{2x^2-3x+1} = 0$$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-2x}{x+4}$ pour $x \neq -4$

$$\frac{5x^3-2x}{x+4} = \frac{x\left(5x^2-2\right)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{5x^2-2}{1+\frac{4}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^2 - 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{4}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

Par quotient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3-2x}{x+4} = +\infty$$

<u>Théorème</u> : La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est la limite du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Rédaction :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{4x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x+1}{2x^2-3x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3-2x}{x+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} 5x^2 = +\infty$$

8) <u>Limite d'une fonction par comparaison</u> :

On utilisera les mêmes théorèmes de comparaison que pour les suites.

9) Limite d'une fonction composée :

Une fonction composée est une fonction obtenue en enchainant les fonctions de référence.

Exemple : $f(x) = e^{-2x+3}$.

f est une fonction composée d'une fonction affine $g(x) = -2x + 3$ et d'une fonction exponentielle $h(x) = e^x$. On a $f(x) = h(g(x))$

$$x \longrightarrow -2x + 3 \longrightarrow e^{-2x+3}$$
$$X \longrightarrow e^X$$

Pour étudier la limite de f en $+\infty$ par exemple, on étudie d'abord

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x + 3 = -\infty$ puis on calcule $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Propriété admise :

Si a, b et c sont des réels finis ou des infinis

Si f, g et h sont des fonctions numériques réelles telles que $f(x) = h(g(x))$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow h(g(x)) = f(x)$$
$$X \longrightarrow h(X)$$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} h(X) = c$ Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(g(x)) = c$

Exemples : Déterminer la limite de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ *en* $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 4 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$$

$$X = x^2 - 4$$

Déterminer la limite de $f_2(x) = \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2$ *lorsque x tend vers* $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{2}{x} = 3 \text{ et } \lim_{X \to +\infty} X^2 = 9 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2 = 9$$

$$X = 3 - \frac{2}{x}$$

V. Limites et fonction exponentielle :

1) Limite en + ∞ :

Pour montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ on utilise le théorème de comparaison.

On va étudier la fonction $g(x) = e^x - x$ sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = e^x - 1$ $\quad g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	1	↗	

Le minimum de g sur R est g(0)= 1.

donc $g(x) \geq 1 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

donc $e^x > x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Or $\lim x = +\infty$ donc par comparaison

2) Limite en – ∞ :

Pour montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ on utilise un changement de variable.

On pose $X = -x$ donc $x = -X$. Donc quand x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0.$

On peut également en déduire que **la courbe de la fonction exponentielle admet la droite y = 0 comme asymptote en – ∞.**

3) Limite et nombre dérivé :

On sait que le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 vaut $(\exp)'(0) = e^0 = 1$.

Donc on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\exp(0 + h) - \exp(0)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

4) Croissance comparée de x et e^x :

a) en + ∞ : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On étudie la fonction h définie par $h(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$ sur $[0 ; +\infty[$.

$h'(x) = e^x - x = g(x)$ du 1). On a vu que $g(x) > 0$ donc $h'(x) > 0$
donc h strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$h(0) = 1$ donc $h(x) \geq 1 > 0$ pour $x \geq 0$ donc $e^x > \dfrac{1}{2}x^2$ pour $x \geq 0$.

Si $x > 0$ on a $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{1}{2}x$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On peut également en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-x} = 0$

b) en – ∞ : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$

Il suffit de poser $X = -x$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} -X\, e^{-X} = -\left(\lim\limits_{X \to +\infty} X\, e^{-X}\right) = 0.$

On dit parfois que l'exponentielle l'emporte sur les puissances (x , x^2 , ….).

VI. Etude complète d'une fonction :

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Montrer que pour $x \neq 1$ on a : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$
4) Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C}_f)$?
5) Dresser le tableau de variations de f.
6) Calculer l'équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse 0.
7) Tracer $(\mathscr{C}_f)$ ainsi que les asymptotes éventuelles et la tangente déterminée en 6).

$(\mathscr{C}_f)$

$x = 1$