FICHE DE REVISIONS DS4

Exercices sur l'espace :

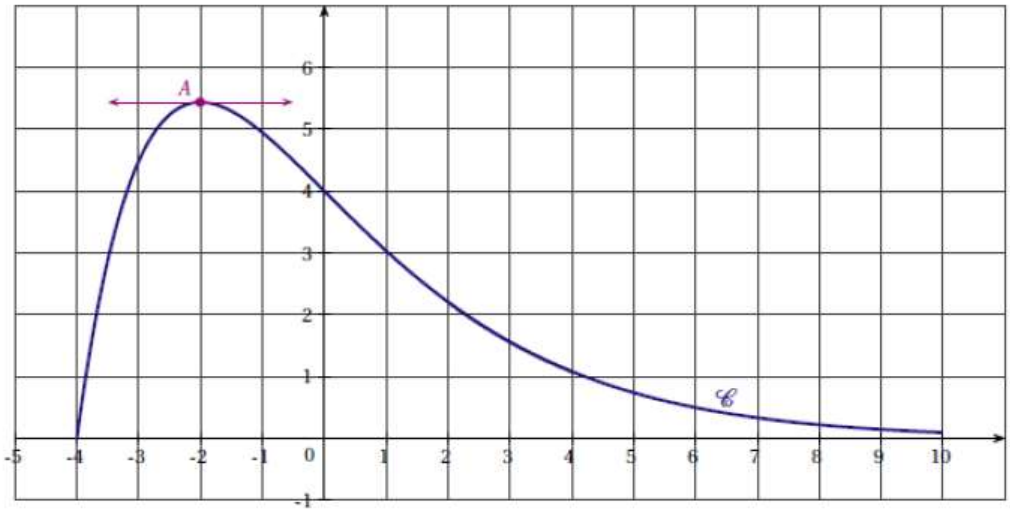
Page 81 n° 94 et 95
Page 75 n° 59

Exercices sur les suites :

Page 207 n° 88 et 89

Exercices sur les fonctions :

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [– 4 ; 10]. On note f' la fonction dérivée de f et f'' sa fonction dérivée seconde.
La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A d'abscisse – 2 est parallèle à l'axe des abscisses.
La courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des ordonnées en 4.



Partie A

1) Déterminer en les justifiant les valeurs de $f(0)$ et de $f'(-2)$.

2) La fonction f est de la forme $f(x) = (ax + b)\,e^{-0,5x}$ avec a et b réels.
Déduire de la question précedente les valeurs de a et de b.

Partie B

1) La fonction représentée par la courbe ($\mathscr{C}$) est définie sur [– 4 ; 10] par $f(x) = (x + 4)e^{-0,5x}$.
   a) Déterminer $f'(x)$.
   b) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [– 4 ; 10].

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 7].
   b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3) a) Etudier la convexité de f sur [– 4 ; 10].
   b) En déduire que la courbe ($\mathscr{C}$) admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.

CORRECTION FICHE DE REVISIONS DS4

Exercices sur l'espace :

Page 81 n° 94

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}$, vecteur directeur de la droite d, a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-6\\8\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}$ donc d et (AB) sont parallèles.

   L'affirmation est vraie.

2. $\overrightarrow{v}$, vecteur directeur de la droite d', a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix}$. De plus, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$. d' est parallèle au plan (ABC) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\-3a-3b=-3\\4a+2b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$.

   $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de la droite d' donc d' est parallèle au plan (ABC).

   L'affirmation est vraie.

3. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CD}\neq\overrightarrow{AB}$ donc D n'est pas l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   L'affirmation est fausse.

4. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace si, et seulement si, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants soit si, et seulement si, $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$. On a :

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b+2c=0\\-3a-3b-3c=0\\4a+2b+2c=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+2c=0\\3c=0\\4a+2b+2c=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\c=0\\b=0\end{cases}$$

   $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est donc bien un repère de l'espace.

   L'affirmation est vraie.

5. D'après la première question, les droites (AB) et d sont parallèles. Elles sont donc coplanaires.

   L'affirmation est vraie.

Page 81 n° 95

1. Par lecture graphique, on obtient $C(8;15;0)$.

2. En utilisant le calcul de coordonnées d'un vecteur, on obtient $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}0\\7\\-3\end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IC}$.

   K est un point de la droite (EF) donc $\begin{cases}x_K=t\\y_K=0\\z_K=3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

   Ainsi, $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+0b=t\\7a+7b=0\\0a-3b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=t\\a=1\\b=-1\end{cases}$.

   Avec $t=-1$, on a $K(-1;0;3)$ et $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CJ}$.

4. $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IC}$.

   M est un point de la droite (EH) donc $\begin{cases}x_M=0\\y_M=t\\z_M=3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

   Ainsi, $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+0b=0\\7a+7b=t\\0a-3b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\-7=t\\b=-1\end{cases}$.

   Avec $t=-7$, on a $M(0;-7;3)$ et $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{IC}$.

5. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CJ}$ donc les droites (AK) et (CJ) sont parallèles.

   $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{IC}$ donc les droites (AM) et (IC) sont parallèles.

   Les droites (AK) et (AM) sécantes en A du plan (AMK) sont respectivement parallèles aux droites (CJ) et (IC) sécantes en C du plan (IJC).

   Les plans (AMK) et (IJC) sont donc parallèles.

Page 75 n° 59

$I\in(BS)$ donc $I\in(BDS)$ et $J\in(BDS)$. Ainsi, $(IJ)\subset(BDS)$. $I\in(EF)$ donc $I\in(EFG)$ et $J\in(EH)$ donc $J\in(EFG)$. Ainsi $(IJ)\subset(EFG)$ De plus $(BD)\subset(BCD)$. Les plans (EFG) et (BCD) sont parallèles (par les propriétés des faces opposées dans un cube). Le plan (BDS) coupe le plan (EFG) selon la droite (IJ) et le plan (BCD) selon la droite(BD). Les deux droites (IJ) et (BD) sont donc parallèles.

Exercices sur les suites :

Page 207 n° 88

1. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$.
2. On en déduit le tableau de variations suivant. Signe de $f'(x)$: $1 - x > 0$ équivaut à $x < 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. De plus f est croissante sur [0 ; 1] donc pour tout $x \in$ [0 ; 1] $f(x) \in$ [0 ; 1].
3. Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $0 \leq u_n \leq 1$ ".

   Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 0{,}2$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$ P_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $0 \leq u_k \leq 1$.

   Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.

   $0 \leq u_k \leq \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_k) \leq f(1)$ car f est croissante sur [0; 1]

   $\Leftrightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$

   Donc P_{k+1} est vraie.

   Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

4. Conjecture : La suite (u_n) est croissante. Montrons donc que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.
   Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $u_n \leq u_{n+1}$ ".

   Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 0{,}2$ et $u_1 = f(0{,}2) = 0{,}36$ donc $u_0 \leq u_1$ P_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k \leq u_{k+1}$

   Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq u_{k+2}$

   $u_k \leq u_{k+1} \Leftrightarrow f(u_k) \leq f(u_{k+1})$ car f est croissante $\Leftrightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2}$

   Donc P_{k+1} est vraie.

   Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente .
   f est continue donc d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$
   donc $l = l(2 - l) \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l(l - 1) = 0 \Leftrightarrow l = 0$ ou $l = 1$
   La suite étant croissante et $u_0 = 0{,}2$ donc $l \geq 0{,}2$ donc $l = 0$ ne convient pas .
   La suite (u_n) a donc pour limite 1.

Page 207 n° 89

1. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$.

   Pour tout C, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ donc f' est strictement positive sur $[1;2]$, d'où le tableau de variations suivant.

x	1	2
$f'(x)$	$+$	
f	$\frac{3}{2}$ ↗	$\frac{5}{3}$

2. $f(1) = 1{,}5$ et $f(2) = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{5}{3} < 2$. De plus f est croissante sur [1 ; 2]

   donc pour tout $x \in [\,1\,;\,2\,]$ $f(x) \in [\,1\,;\,2\,]$.

3. Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $1 \leq u_n \leq 2$ ".

   Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 1{,}5$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$ P_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $1 \leq u_k \leq 2$.

   Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $1 \leq u_{k+1} \leq 2$.

   $1 \leq u_k \leq \leq 2 \Leftrightarrow f(1) \leq f(u_k) \leq f(2)$ car f est croissante sur [1; 2]

   $\Leftrightarrow 1 \leq u_{k+1} \leq 2$

   Donc P_{k+1} est vraie.

   Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

4. Conjecture : La suite (u_n) est croissante. Montrons donc que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.
   Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $u_n \leq u_{n+1}$ ".

   Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 1{,}5$ et $u_1 = f(1{,}5) \approx 1{,}67$ donc $u_0 \leq u_1$ P_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k \leq u_{k+1}$

   Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq u_{k+2}$

   $u_k \leq u_{k+1} \Leftrightarrow f(u_k) \leq f(u_{k+1})$ car f est croissante $\Leftrightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2}$

   Donc P_{k+1} est vraie.

   Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc elle est convergente .
   f est continue donc d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$

   donc $l = \dfrac{2l+1}{l+1} \Leftrightarrow l^2 + l = 2l + 1 \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0$ On a un trinôme

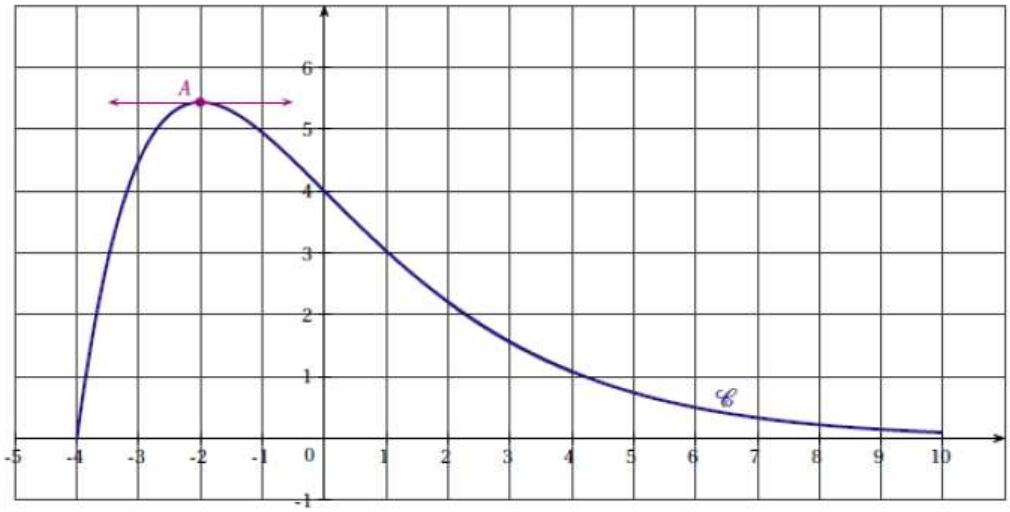
   donc $\Delta = 1 + 4 = 5$ et $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

   La suite étant croissante et $u_0 = 1{,}5$ donc $l \geq 1{,}5$ donc $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ne convient pas .

   La suite (u_n) a donc pour limite $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercices sur les fonctions :

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [– 4 ; 10]. On note f' la fonction dérivée de f et f'' sa fonction dérivée seconde.
La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A d'abscisse – 2 est parallèle à l'axe des abscisses.
La courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des ordonnées en 4.



Partie A

1) Déterminer en les justifiant les valeurs de $f(0)$ et de $f'(-2)$.

$f(0) = 4$ et $f'(-2) = 0$ (car la tangente est horizontale)

2) La fonction f est de la forme $f(x) = (ax + b)\,e^{-0,5x}$ avec a et b réels.
Déduire de la question précedente les valeurs de a et de b.

$f(0) = 4 \Leftrightarrow b \times e^0 = 4 \Leftrightarrow b = 4$

$f'(x) = a\,e^{-0,5x} + (ax + b)(-0,5\,e^{-0,5x}) = e^{-0,5x}(-0,5\,a\,x + a - 0,5b)$

$f'(-2) = 0 \Leftrightarrow e^{-1}(a + a - 0,5 \times 4) = 0 \Leftrightarrow e^{-1}(2a - 2) = 0 \Leftrightarrow 2a - 2 = 0$ car $e^{-1} \neq 0 \Leftrightarrow a = 1$

donc $f(x) = (x + 4)\,e^{-0,5x}$

Partie B

1) La fonction représentée par la courbe ($\mathscr{C}$) est définie sur [– 4 ; 10] par $f(x) = (x + 4)e^{-0,5x}$.

a) Déterminer $f'(x)$.

d'après 1) $f'(x) = e^{-0,5x}(-0,5\,x - 1)$ en remplaçant a par 1 et b par 4.

b) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [– 4 ; 10].

Signe de $f'(x)$:

$e^{-0,5x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur [– 4 ; 10]

$-0,5\,x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-1}{0,5} \Leftrightarrow x \leq -2$

x	– 4		-2		10
signes de $f'(x)$		+	**0**	–	
variations de f	0	↗	2e	↘	14 e^{-5}

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 7].

Sur [0 ; 7], la fonction f est définie, continue (car dérivable) et strictement décroissante.

$f(0) = 4\,e^0 = 4$; $f(7) = 11e^{-3,5} \approx 0,33$ et $3 \in [\,f(7) ; f(0)\,]$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique α dans [0 ; 7] tel que $f(\alpha) = 3$.

b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

D'après la calculette $1{,}035 < \alpha < 1{,}036$ donc $\alpha \approx 1{,}04$ à 10^{-2} près.

3) a) Etudier la convexité de f sur $[-4 ; 10]$.

$f''(x) = -0{,}5\, e^{-0{,}5x}\,(-0{,}5\,x - 1) + e^{-0{,}5x} \times (-0{,}5) = e^{-0{,}5\,x}\,(-0{,}25\,x)$

f est convexe $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -0{,}25\,x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Donc f est convexe sur $[-4 ; 0]$ et concave sur $[0 ; 10]$.

b) En déduire que la courbe ($\mathscr{C}$) admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = 0$ donc f admet un point d'inflexion d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = 4$.