Nom, Prénom : …………………………………………………. **Mardi 12 Décembre 2023**

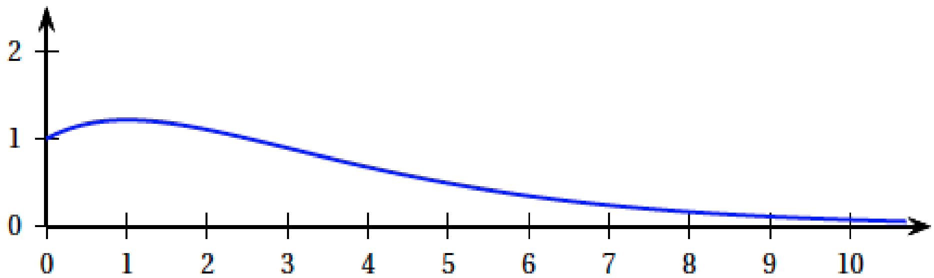
TSpé DEVOIR SURVEILLE N°4

/40

Exercice 1: *(11 points)*

Partie A :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 11] par $f(x) = (a\,x + b)e^{\frac{-1}{2}x}$ où a et b désignent deux nombres réels. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle [0 ; 11] et on note f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative C_f est tracée ci-dessous.
Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.



1) Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.
2) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0 ; 11]$, $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\,ax - \frac{1}{2}b + a\right)e^{-\frac{1}{2}x}$
3) Déterminer les valeurs de a et de b.

Partie B :

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur [0 ; 11] par : $f(x) = (x+1)\,e^{-\frac{1}{2}x}$

1) Étudier les variations de la fonction f sur [0 ; 11] et construire son tableau de variations.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 11].
3) Donner l'arrondi de α à l'unité.

Exercice 2 : VRAI/FAUX *(6 points)*

L'espace est rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(– 3 ; – 2 ; – 1) , B(– 2 ; 0 ; 1) et C(7 ; 3 ; 6).

On donne des représentations des droites d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d': $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -3 + t' \\ z = t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

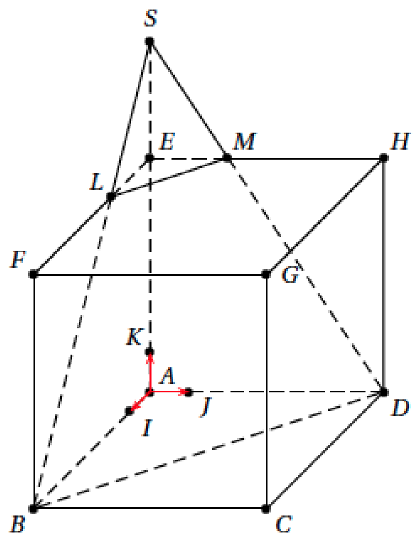
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. Les droites d et (AB) sont confondues.

2. Les droites d' et (BC) sont sécantes.

Exercice 3 : *(11 points)*

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de **6 mètres d'arête**. Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-contre.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ tel que : I ∈ [AB], J ∈ [AD], K ∈ [AE] et AI = AJ = AK = 1, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

Partie A

Dans cette partie, on n'utilisera pas les coordonnées.

1. Démontrer que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
2. Démontrer que les droites (LM) et (FH) sont parallèles.
3. En déduire que dans le plan (EFG) le triangle ELM est isocèle.

Partie B

Dans cette partie, on utilisera le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$.

1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H.

   b. Démontrer que les coordonnées du point L sont (2 ; 0 ; 6) et que les coordonnées du point M sont (0 ; 2 ; 6).

2. a. Donner une représentation paramétrique de chacune des droites (BL) et (DM).

   b. En déduire les coordonnées du point S .

Exercice 4 : *(12 points)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0; 4] par : $f(x) = \dfrac{2 + 3x}{4 + x}$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0; 4].

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

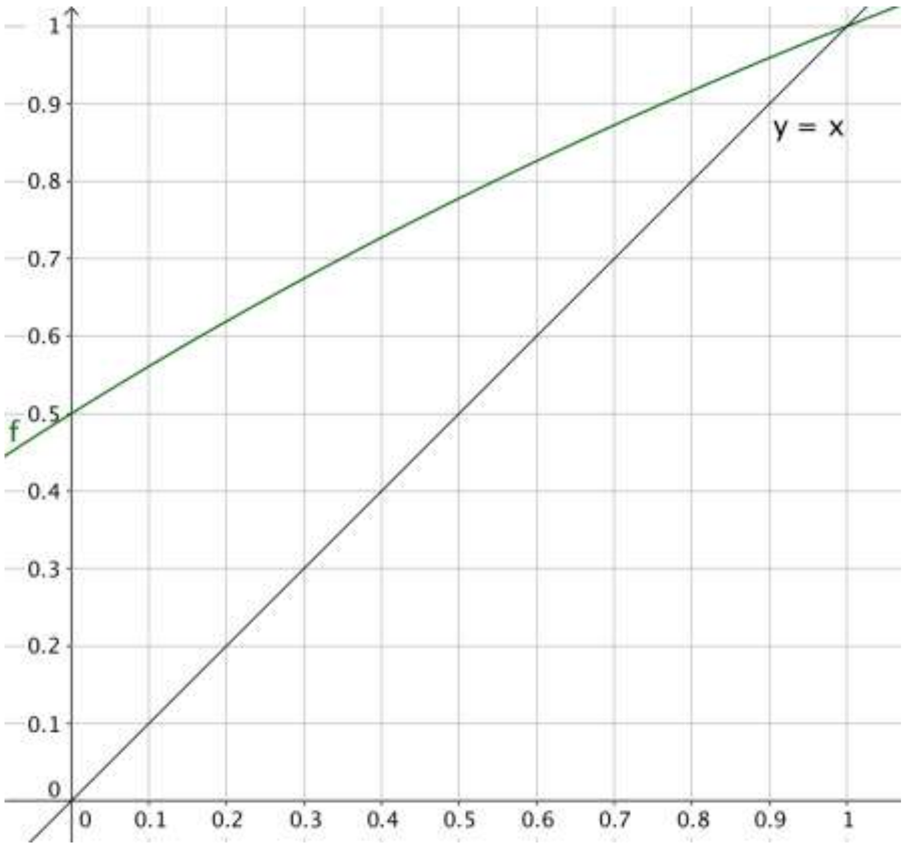
   b. On appelle l la limite de la suite (u_n). Montrer l'égalité : $l = \dfrac{2 + 3l}{4 + l}$

   c. Déterminer la valeur de la limite l .

Partie B BONUS *(4 points)*

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$

1. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, par construction géométrique (on laissera les traits de construction), les termes v_0, v_1, v_2 et v_3.



2. Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4 + v_n}\right)(1 - v_n)$

   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

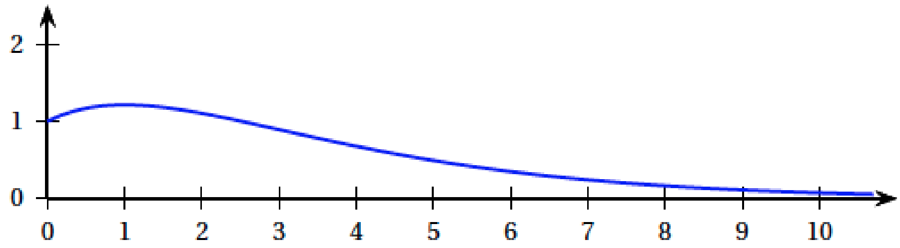
3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

CORRIGÉ : DS 04 TMATHS

Ex 1 : (11 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 11] par : $f(x)=(ax+b)e^{\frac{-1}{2}x}$ où a et b désignent deux nombres réels.
On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle [0 ; 11] et on note f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative C_f est tracée ci-contre.



Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$.

$f(0) = 1$ et $f'(1) = 0$.

2. Démontrer que, pour tout réel $x \in [0 ; 11]$, $f'(x)=(\frac{-1}{2}ax-\frac{1}{2}b+a)e^{\frac{-1}{2}x}$

$$f'(x)=a e^{\frac{-1}{2}x}-\frac{1}{2}(ax+b)e^{\frac{-1}{2}x}=(\frac{-1}{2}ax-\frac{1}{2}b+a)e^{\frac{-1}{2}x}$$

3. Déterminer les valeurs de a et b.

$f(0) = (0+b)\, e^0 = 1 \Leftrightarrow b = 1$

donc $f(x)=(ax+1)e^{\frac{-1}{2}x}$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (\frac{-1}{2}a-\frac{1}{2}+a)e^{\frac{-1}{2}}=0 \Leftrightarrow (\frac{-1}{2}a-\frac{1}{2}+a)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=1$

donc $f(x)=(x+1)e^{\frac{-1}{2}x}$

et $f'(x)=(\frac{-1}{2}x-\frac{1}{2}+1)e^{\frac{-1}{2}x}=(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2})e^{\frac{-1}{2}x}$

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur [0 ; 11] par : $f(x)=(x+1)e^{\frac{-1}{2}x}$

1. Étudier les variations de la fonction f sur [0 ; 11] et construire son tableau de variations.

La fonction $x \mapsto e^{\frac{-1}{2}x}$ est dérivable sur ℝ comme composée de fonctions dérivables sur ℝ.
Donc f est dérivable sur ℝ comme produit de fonctions dérivables sur ℝ, donc sur [0 ; 11] .
D'après la partie A, $f'(x)=(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2})e^{\frac{-1}{2}x}$ et est donc du signe de $(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2})$ car $e^{\frac{-1}{2}x}>0$ pour tout réel x.

$\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow x<1$

On établit le tableau des variations de f sur [0 ; 11] :

x	0		1		11
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2e^{-1/2}$	$\searrow$	$f(11)$

$f(11)=(12)e^{\frac{-1}{2}*11}\approx 0{,}049$

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 11].

f est dérivable donc **continue** sur [0 ; 11].
- Sur [0 ; 1], f est strictement croissante donc $f(x) \geq f(0) > 0{,}5$; l'équation $f(x) = 0{,}5$ n'a donc aucune solution sur cet intervalle.
- Sur [1 ; 11], f est **strictement décroissante** et $\boldsymbol{f(11) < 0{,}5 < f(1)}$; l'équation $f(x) = 0{,}5$ a donc une unique solution sur cet intervalle (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

On en déduit que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une solution unique dans [0 ; 11].

3. Donner l'arrondi de α à l'unité.

En utilisant la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 5$ arrondi à l'unité.

Ex 2 : VRAI/FAUX (6 points)

L'espace est rapporté au repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(-3 ; -2 ; -1), B(-2 ; 0 ; 1), et C(7 ; 3 ; 6)

On donne des représentations des droites d : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$ et d' : $\begin{cases} x=1+t' \\ y=-3+t' \quad t'\in\mathbb{R} \\ z=t' \end{cases}$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. Les droites d et (AB) sont confondues. **FAUX**

$\vec{AB}$ (1 ; 2 ; 2) est un vecteur directeur de d. Donc (AB) et d sont parallèles.

$\begin{cases} -3=1+t \\ -2=-1+2t \\ -1=1+2t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -4=t \\ \frac{-1}{2}=t \\ -1=t \end{cases}$ incompatible.

Donc A n'appartient pas à d, et les droites (AB) et d sont strictement parallèles.

2. . Les droites d' et (BC) sont sécantes. **VRAI**

$\vec{BC}$ (9 ; 3 ; 5) et $\vec{v}$ (1 ; 1 ; 1) vecteur directeur de d' ne sont pas colinéaires car $\frac{9}{1} \neq \frac{3}{1}$ (en prenant les deux premières coordonnées de $\vec{BC}$ et $\vec{v}$). Donc (BC) et d' ne sont pas parallèles.

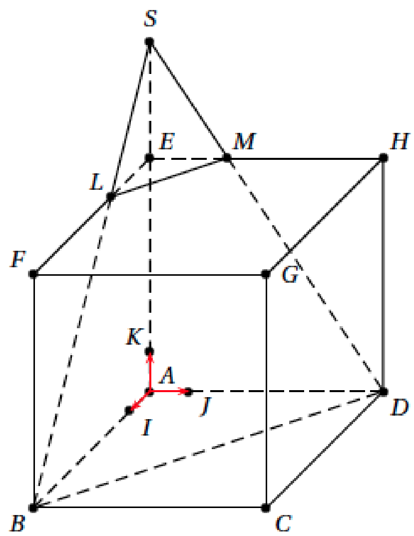
La représentation paramétrique de (BC) est : $\begin{cases} x=-2+9t \\ y=0+3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1+5t \end{cases}$

$\begin{cases} -2+9t=1+t' \\ 3t=-3+t' \\ 1+5t=t' \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -2+9t=1+1+5t \\ 3t=-3+1+5t \\ 1+5t=t' \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t'=6 \end{cases}$ système compatible.

En remplçant t par 1 dans la représentation paramétrique de (BC) , on obtient les coordonnées de C.
Donc les droites (BC) et d' sont sécantes en C.

Ex 3 : (11 points)

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-contre.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ tel que : I ∈ [AB], J ∈ [AD], K ∈ [AE] et AI = AJ = AK = 1, l'unité graphique représentant 1mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

• L est le point tel que $\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$

• M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;

• S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

Partie A

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

• Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, car s'appuyant sur deux faces opposées du cube.
• Le plan (BDL) coupe donc les plans (EFG) et (ABC) selon deux droites parallèles :
— l'intersection du plan (BDL) et du plan (ABC) est la droite (BD) ;
— l'intersection du plan (BDL) et du plan (EFG) est la droite (LM) ; en effet :
par définition M ∈ (EH), or (EH) ⊂ (EFG) donc M ∈ (EFG) et, toujours par définition M ∈ (BDL) ;
L ∈ (FE) or (FE) ⊂ (EFG) donc L ∈ (EFG) et il est évident que L ∈ (BDL).
Les points L et M sont deux points distincts, appartenant chacun à la fois aux plans (BDL) et (EFG). L'intersection de ces deux plans est donc la droite (LM).
On peut donc conclure que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les droites (LM) et (FH) sont parallèles.

Le plan (FBD) contenant les droites parallèles (FB) et (DH) (parallèles à une même troisième droite (CG)) coupe les plans (EFG) et (ABC) selon deux droites parallèles (FH) et (BD).
Comme (LM)//(BD) alors (LM)//(FH)

3. En déduire que dans le plan (EFG) le triangle ELM est isocèle.

Dans le triangle (EFH) , les points alignés E, L, F sont rangés dans le même ordre que les points alignés E, M, H et les droites (LM) et (FH) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{EL}{EF}=\frac{EM}{EH}$,
et puisque EF = EH = 6 , alors EL = EM. Donc le triangle ELM est isocèle.

Partie B

1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H.

A(0 ; 0 ; 0) ; B(6 ; 0 ; 0) ; C(« ; 6 ; 0) ; D(0 ; 6 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 6) ; F(6 ; 0 ; 6) ; G(6 ; 6 ; 6) ; H(0 ; 6 ; 6)

b. Démontrer que les coordonnées du point L sont (2 ; 0 ; 6) et que les coordonnées du point M sont (0 ; 2 ; 6).

On a E(0 ; 0 ; 6) ; F(6 ; 0 ; 6). En notant L(x ; y ; z), l'égalité vectorielle $\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$ donne :

$$\begin{cases} x-6=\frac{2}{3}(0-6) \\ y-0=\frac{2}{3}(0-0) \\ z-6=\frac{2}{3}(6-6) \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x-6=-4 \\ y=0 \\ z-6=0 \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases}$$

Donc L(2 ; 0 ; 6)

Le triangle ELM est isocèle, donc $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AJ}$

Donc $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=6\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{AJ}=0\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AJ}+6\overrightarrow{AK}$ c'est-à-dire M(0 ; 2 ; 6)

2. a. Donner une représentation paramétrique de chacune des droites (BL) et (DM)

La droite (BL) passe par B(6 ; 0 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BL}$ (−4 ; 0 ; 6). Une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x=6-4t \\ y=0+0t \\ z=0+6t \end{cases} t\in\mathbb{R} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x=6-4t \\ y=0 \\ z=6t \end{cases} t\in\mathbb{R}$$

La droite (DM) passe par D(0 ; 6 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DM}$ (0 ; -4 ; 6). Une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x=0+0t' \\ y=6-4t' \\ z=0+6t' \end{cases} t'\in\mathbb{R} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x=0 \\ y=6-4t' \\ z=6t' \end{cases} t'\in\mathbb{R}$$

b. En déduire les coordonnées du point S .

Le point S appartient aux droites (BL) et (DM) donc ses coordonnées vérifient : $\begin{cases} x=6-4t=0 \\ y=0=6-4t' \\ z=6t=6t' \end{cases}$

Ce qui équivaut à $\begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ t'=\frac{3}{2} \\ t=t' \end{cases}$ et le système est compatible

Le point S a pour coordonnées $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=6\times\frac{3}{2}=9 \end{cases}$ S(0 ; 0 ; 9)

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0; 4] par : $f(x)=\frac{2+3x}{4+x}$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .

$u_1 = f(u_0) = \frac{2+9}{4+3} = \frac{11}{7}$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0; 4].

La fonction f est définie et dérivable sur $[0;4]$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \frac{3(4+x)-1(2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2}$

Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0;4]$.
La fonction f est donc croissante sur $[0;4]$.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

Démonstration par récurrence :

Initialisation

On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$: l'encadrement est vrai au rang 0;

Hérédité

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0;4]$, on

$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \frac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \frac{11}{7} \leqslant 3$,

$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.

b. On appelle l la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité : $l=\frac{2+3l}{4+l}$

c. Déterminer la valeur de la limite l .

De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$

On en dédit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell+\ell-2 = 0$.

Or $\Delta = 1+4\times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :

$\ell_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.

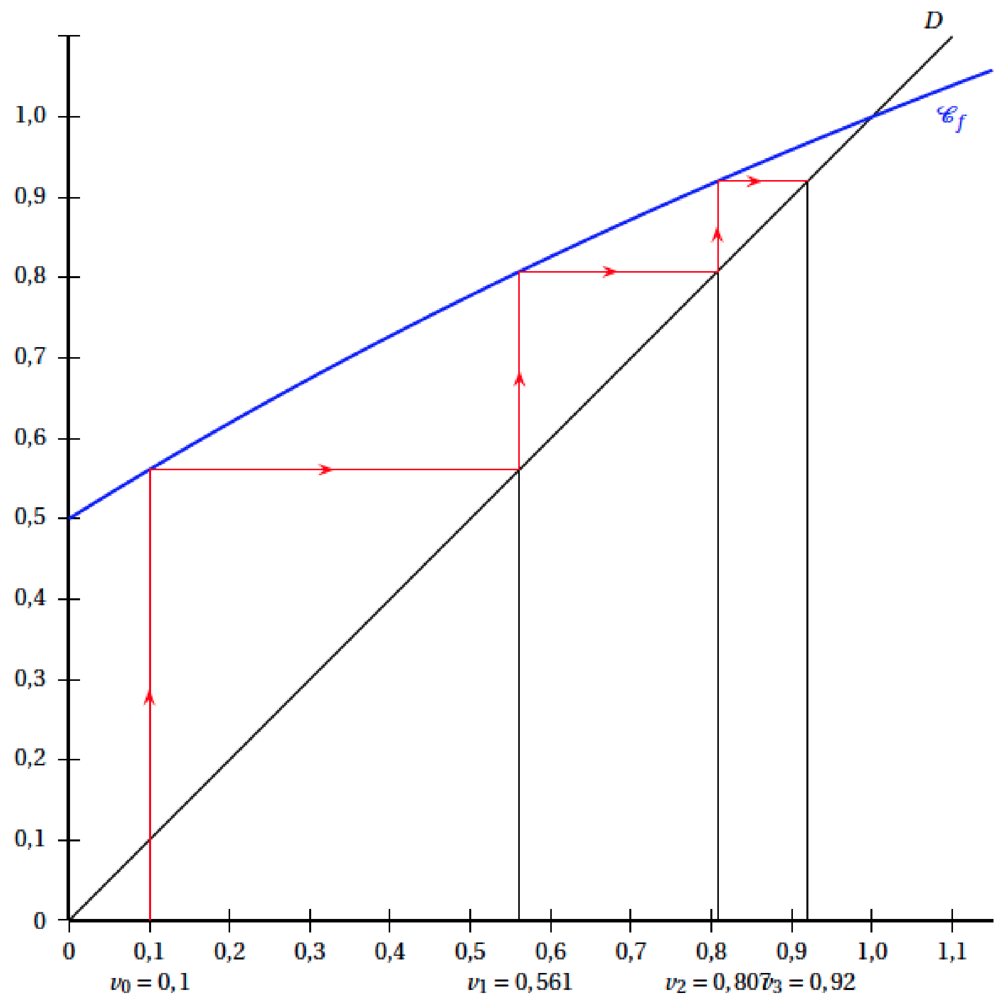
Comme $\ell \in [1 ; 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Partie B BONUS : (4 pts)

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$

1. On donne ci-dessous la courbe représentative C_f , de la fonction f et la droite D d'équation y = x.

Placer sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, par construction géométrique (on laissera les traits de construction), les termes v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .



2. Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle a pour limite 1.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$

$$1 - v_{n+1} = 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n} = \frac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \frac{2-2v_n}{4+v_n} = \frac{2}{4+v_n}(1-v_n).$$

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq 1- v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisation pour $n = 0$, $1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

Hérédité Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a $1 - v_{n+1} = \frac{2}{4+v_n}(1-v_n)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$1 - v_{n+1} \leqslant \frac{2}{4+v_n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geqslant 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$; il suit que $4 + v_n \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \frac{1}{4+v_n} \leqslant \frac{1}{4}$.

On a donc $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant 2 \times \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :

$0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang $n$quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

quel que soit le naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. La suite (v_n) converge-t-elle? Si oui, préciser sa limite.

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la la limite de $1 - v_n = 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 1.$$