

Nom :

Nov. 2023

Prénom :

DS 03



CASE DES MATHS



.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

**Exercice 1 2CM**

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1 pt **1** La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égal à :

a. $3^n(3^n + 2)$

b. $3^n + 5^n$

c. 3^{n+1}

1 pt **2** Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$:

a. $u_1 = 5$

b. $u_2 = 200$

c. La suite (u_n) est croissante.1 pt **3** Si la suite (u_n) est géométrique alors on peut avoir :

a. $u_n = (n+1)^2$

b. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

1 pt **4** Si la suite (u_n) est arithmétique alors on peut avoir :

a. $u_n = n^2 + 3$

b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

c. $u_n = \frac{3}{4}n - 3$

1 pt **5** La limite quand $n \rightarrow +\infty$ de la suite de terme général $u_n = \frac{1-4n}{n}$ est :

a. -1

b. -4

c. $+\infty$

**Exercice 2**

10 points

10 pts On rédigera en détail, la détermination de chaque limite.

1 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $u_n = 2n^2 + 3n + 5$.**2** Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $v_n = \frac{n+2}{n^2+1}$.**3** Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \times (-n^2 - n + 1)$.**4** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$ **5** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + 2 \right)$ **Exercice 3 Limite et comparaison**

3 points

3 pts Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{\cos(n)}{e^n}$ **1** Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 - e^{-n} \leq u_n \leq 1 + e^{-n}$ **2** En déduire la limite de la suite (u_n) .

 Exercice 4**3 points**

3 pts

- 1** Construire la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in [-2; 0[\\ x & \text{si } x \in [0; 2] \end{cases}$$

- 2** La fonction f est-elle continue sur $[-2, 2]$. Justifier.

 Exercice 5**8 points**

8 pts f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ par $f(x) = x^3 - 27x + 4$

- 1** Montrer que pour tout réel x de $[-4; 4]$, on a $f'(x) = 3(x - 3)(x + 3)$.
- 2** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.
- 3** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[-4; 4]$.
- 4** Avec la calculatrice donner un arrondi au centième de α .
- 5** En déduire le signe de $f(x)$.

 Exercice 6**12 points**

12 pts On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

- 1** Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.
- 2** a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

- b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

- 3** Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

- a. Calculer v_0 .
- b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.
- c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

- d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

- 4** En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année. Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ». Que pensez-vous de cette affirmation? Justifier la réponse.

Nom : Prénom :	DS 03 CASE DES MATHS	TMATHS OISELET <i>Nov. 2023</i> Devoir n° 06 .../...
-------------------------------	---	--

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
 Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 2CM

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 20 minutes après le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1 pt **1** La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égal à :

a. $3^n(3^n + 2)$

b. $3^n + 5^n$

c. 3^{n+1}

$$\begin{aligned}
 3^n + 2 \times 3^n &= 3^n + 2 \times 3^{\times 1} \\
 &= 3^n \times (2 + 1) \\
 &= 3 \times 3^n \\
 &= 3^{n+1}
 \end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

1 pt **2** Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$:

a. $u_1 = 5$

b. $u_2 = 200$

c. La suite (u_n) est croissante.

On a $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$, d'où on déduit $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2$.
 Ainsi pour tout entier naturel $n : u_n^2 \geq 0$ car le carré d'un réel est toujours positif.
 En multipliant par $2 > 0$, on a pour tout entier naturel $n : u_{n+1} - u_n \geq 0$.
 Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

La bonne réponse est c.

1 pt **3** Si la suite (u_n) est géométrique alors on peut avoir :

a. $u_n = (n+1)^2$

b. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

Si la suite (u_n) est géométrique alors pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = qu_n$, où q désigne une constante. Or dans le c. , on a $u_{n+1} = -u_n = -1 \times u_n$

La bonne réponse est c.

1 pt **4** Si la suite (u_n) est arithmétique alors on peut avoir :

a. $u_n = n^2 + 3$

b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

c. $u_n = \frac{3}{4}n - 3$

Si la suite (u_n) est arithmétique alors pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = r$ où r désigne une constante. Or dans le c. , on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{4}(n+1) - 3 - \left(\frac{3}{4}n - 3\right) \\ &= \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} - 3 - \frac{3}{4}n + 3 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

1 pt **5** La limite quand $n \rightarrow +\infty$ de la suite de terme général $u_n = \frac{1-4n}{n}$ est :

a. -1

b. -4

c. $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1-4n}{n} &= \frac{n\left(\frac{1}{n} - 4\right)}{n} \\ &= \frac{1}{n} - 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 4 = -4$$

La bonne réponse est b.

Exercice 2

10 points

10 pts On rédigera en détail, la détermination de chaque limite.

1 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $u_n = 2n^2 + 3n + 5$.

$$\begin{aligned} u_n &= 2n^2 + 3n + 5 \\ &= n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ on a :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ Par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $v_n = \frac{n+2}{n^2+1}$.

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{n+2}{n^2+1} \\
 &= \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

3 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \times (-n^2 - n + 1)$.

$$\begin{aligned}
 w_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times (-n^2 - n + 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times n^2 \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
 &= \frac{n^2}{\sqrt{n}} \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
 &= n\sqrt{n} \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \text{ car } \frac{n^2}{\sqrt{n}} = \frac{n \times \sqrt{n}^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) &= -1 \end{aligned} \right\} \text{ Par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

4 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$
Posons $x_n = \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7} \\
 &= \frac{e^n \left(-3 - \frac{6}{e^n}\right)}{e^n \left(2 + \frac{7}{e^n}\right)} \\
 &= \frac{-3 - 6e^{-n}}{2 + 7e^{-n}}
 \end{aligned}$$

On remarque alors : $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ avec $\frac{1}{e} \approx 0,37$.

On utilise alors le résultat suivant :

Propriété 1

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Comme $-1 < \frac{1}{e} < 1$, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

5 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + 2 \right)$

On utilise ici le théorème des gendarmes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ en divisant par } n > 0 \\ -\frac{1}{n} + 2 \leq \frac{(-1)^n}{n} + 2 \leq \frac{1}{n} + 2 \text{ en ajoutant } 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} + 2 &= 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 2 &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ le théorème des gendarmes s'applique } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 2 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 2 = 2$$

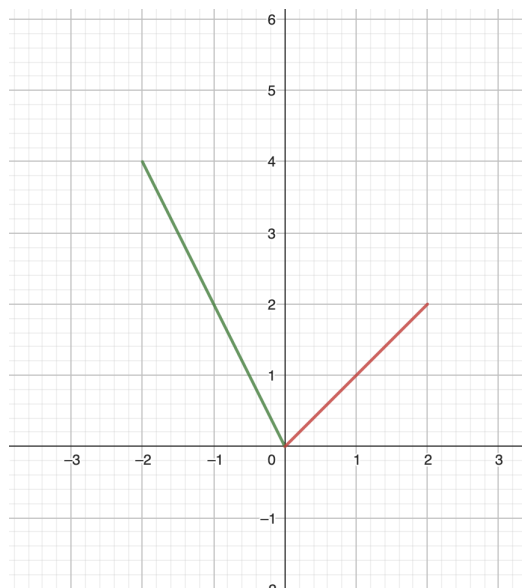
Exercice 3

3 points

3 pts

1 Construire la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in [-2; 0[\\ x & \text{si } x \in [0; 2] \end{cases}$$



2 La fonction f est-elle continue sur $[-2, 2]$. Justifier.

- Déjà f est continue sur chacun des des intervalles $[-2;0[$ et $]0;2]$ car c'est un polynôme sur chacun de ces intervalles.

- Il reste à étudier la continuité en 0 $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \end{array} \right\}$ comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$
 f est donc continue en 0.

f est continue sur $[-2, 2]$.

Exercice 4

8 points

8 pts f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ par $f(x) = x^3 - 27x + 4$

- 1** Montrer que pour tout réel x de $[-4; 4]$, on a $f'(x) = 3(x-3)(x+3)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 27 \\ &= 3(x^2 - 9) \\ &= 3(x^2 - 3^2) \\ &= 3(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

on a bien $f'(x) = 3(x-3)(x+3)$

- 2** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La dérivée est un trinôme du second degré qui a pour racines -3 et 3 . Ainsi la dérivée a le signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur. On déduit le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4; 4]$:

x	-4	-3	3	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de f	48	↗ 58	↘ -50	↗ -40	

- 3** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[-4; 4]$.

- Sur l'intervalle $[-4; -3]$:
 f est strictement croissante, donc si $-4 \leq x \leq -3$ alors $f(-4) \leq f(x) \leq f(-3)$ ce qui fournit $f(x) \geq 48 > 0$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[-4; -3]$.
- Sur l'intervalle $[-3; 3]$:

D'après le théorème de la bijection :

- ↳ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l'intervalle $I = [-3; 3]$.
- ↳ f est strictement décroissante sur l'intervalle $I = [-3; 3]$.
- ↳ $f(-3) = 58$ et $f(3) = -50$
- ↳ f réalise donc une bijection de $[-3; 3]$ sur $[-50; 58]$
0 est compris entre $f(-3)$ et $f(3)$, en effet $f(-3) > 0$ et $f(3) < 0$
donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[-3; 3]$.

- Sur l'intervalle $[3; 4]$:
 f est strictement croissante, donc si $3 \leq x \leq 4$ alors $f(3) \leq f(x) \leq f(4)$ ce qui fournit $f(x) \leq -40 < 0$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[3; 4]$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[-4; 4]$.

4 Avec la calculatrice donner un arrondi au centième de α .

Grâce à une calculatrice, on obtient :

- $f(0,14) \approx 0,22$
- $f(0,15) \approx -0,05$

On déduit donc $f(0,15) < 0 < f(0,14)$

Soit $f(0,15) < f(\alpha) < f(0,14)$

Ainsi puisque f est strictement décroissante sur $[-3; 3]$:

$$0,14 < \alpha < 0,15$$

0,14 est un arrondi au centième de α par défaut.

5 En déduire le signe de $f(x)$.

Le signe se déduit du tableau de variation de f :

x	-4	-3	α	3	4
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de f	48	58	0	-50	-40
Signe de $f(x)$	+	+	0	-	-

Exercice 5 Limite et comparaison

3 points

3 pts Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{\cos(n)}{e^n}$

1 Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 - e^{-n} \leq u_n \leq 1 + e^{-n}$

On utilise ici le théorème des gendarmes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\ -\frac{1}{e^n} \leq \frac{\cos(n)}{e^n} \leq \frac{1}{e^n} \text{ en divisant par } e^n > 0 \\ 1 - \frac{1}{e^n} \leq 1 + \frac{\cos(n)}{e^n} \leq 1 + \frac{1}{e^n} \text{ en ajoutant } 1 \\ 1 - e^{-n} \leq u_n \leq 1 + e^{-n} \text{ car } \frac{1}{e^n} = e^{-n} \end{aligned}$$

2 En déduire la limite de la suite (u_n) .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + e^{-n} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ le théorème des gendarmes s'applique } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

On utilise le résultat obtenu à l'exercice 2, à savoir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

12 pts On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1 Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

- $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700$.
- $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415$.

$$u_1 = 9\,700 \text{ et on a bien } u_2 = 9\,415.$$

2 a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $u_n > 4\,000$ ».

✎ **Initialisation :**

$$u_0 = 10\,000 \text{ et } 10\,000 > 4\,000$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

✎ **Hérédité :** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k > 4\,000$. (HR)

On veut prouver que $u_{k+1} > 4\,000$

$$u_{k+1} = 0,95u_k + 200$$

$$u_k > 4\,000$$

d'après (HR)

$$0,95u_k > 0,95 \times 4\,000$$

en multipliant par $0,95 > 0$

$$0,95u_k + 200 > 0,95 \times 4\,000 + 200$$

en ajoutant 200

$$u_{k+1} > 400$$

$$\text{car } 0,95 \times 4\,000 + 200 = 4\,000$$

✎ **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n , on a « $u_n > 4\,000$ ».

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 200 - u_n$$

$$= (0,95 - 1)u_n + 200$$

$$= -0,05u_n + 200$$

$$= -0,05(u_n - 4\,000)$$

$$\left. \begin{array}{l} -0,05 < 0 \\ (u_n - 4\,000) > 0 \text{ car } u_n > 4\,000 \end{array} \right\} \text{ par produit on a } -0,05(u_n - 4\,000) < 0$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 4000.

D'après le théorème de la convergence monotone, toute suite décroissante minorée est convergente,

ainsi la suite (u_n) est convergente.

3 Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0 .

$$\text{Pour } n = 0, \text{ on a } v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000.$$

$$v_0 = 6000$$

- b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95. Au choix :

Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right) = 0,95(u_n - 4000) = 0,95v_n.$$

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{On peut donc calculer : } \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \\ &= \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95. \end{aligned}$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n , montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

- c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n.$$

D'après le résultat précédent, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000.$$

- d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

Comme $-1 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4000$ (par somme de limites).

- 4 En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation? Justifier la réponse.

u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Exercice 7 Bonus

3 points

3 pts Trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) = x + 2$ si $x < 0$
- f est un polynôme du second degré pour x entre 0 et 1.
- f est affine de pente négative pour $x > 1$.

On pourra vérifier que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

convient !

