LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition et conséquences :

1) Définition :

On connait le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de e^x		+	
variations de e^x	0	a	$+\infty$

Soit a un réel strictement positif.
On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $a \in]0 ; +\infty[$.
donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel α tel que $e^{\alpha} = a$.
Ce réel α sera appelé logarithme népérien de a.
Conclusion : **$e^x = a$ avec $a > 0$ $\Leftrightarrow x = \ln a$.**

Exemples : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1)$ Or $e^0 = 1$ donc **$\ln(1) = 0$**
$e^x = e \Leftrightarrow x = \ln(e)$ Or $e = e^1$ donc **$\ln(e) = 1$**

2) Conséquences algébriques :

$e^x = a$ avec $a > 0$ $\Leftrightarrow x = \ln a$ donc $e^{\ln a} = a$ et $x = \ln e^x$

On en déduit que :
$e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x.

Exemple : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{6-3x} = 8$.

$e^{6-3x} = 8 \Leftrightarrow 6 - 3x = \ln 8 \Leftrightarrow -3x = \ln 8 - 6 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}(\ln 8 - 6)$

$S = \left\{-\frac{1}{3}(\ln 8 - 6)\right\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x+7} = -5$
$e^{2x+7} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc pas de solution $S = \varnothing$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x} - 3e^x + 1 > 0$
Posons $X = e^x$ on a alors $X^2 - 3X + 1 > 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$ $X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$e^{x_1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $e^{x_2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_1 = \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $x_2 = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de $e^{2x} - 3e^x + 1$	+ signe de a	0	– signe de –a	0 + signe de a

Donc $S =]-\infty ; \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)[\cup] \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) ; +\infty[$

II. Etude de la fonction ln:

1) Définition de la fonction logarithme népérien :

On appelle fonction logarithme népérien la fonction *f* définie sur] 0 ; + ∞ [à valeurs dans ℝ , telle que $f(x) = \ln x$.

2) Dérivabilité et continuité de la fonction ln:

La fonction **ln est dérivable sur] 0 ; + ∞ [.**
Toute fonction dérivable étant continue, **la fonction ln sera continue sur] 0 ; + ∞ [.**

De plus $x = e^{\ln x}$ pour $x > 0$ donc $(x)' = (e^{\ln x})'$ donc $1 = (\ln x)' e^{\ln x}$ donc $1 = (\ln x)' \times x$
donc **$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$** .

3) Sens de variation :

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ donc $(\ln x)' > 0$
donc la fonction **ln est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.**

x	0		+ ∞
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	‖	+	
variations de la fonction ln	‖ – ∞	↗	+ ∞

4) Limites de la fonction ln:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ (admise) **b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (admise)**

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$

Démonstration :

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour n entier naturel, n> 0

Démonstration :

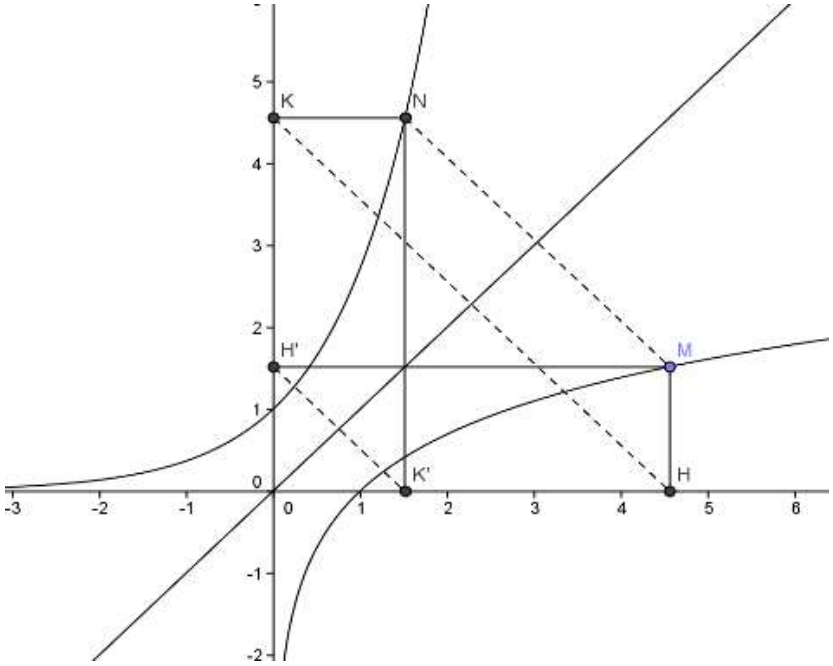
5) Signe de la fonction ln :

x	0		1		+ ∞
ln (x)	‖	↗	0	↗	
Signe de ln(x)	‖	–	0	+	

La fonction ln est strictement sur] 0 ; + ∞ [
et s'annule pour $x = 1$
donc
$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\,0\,;\,1\,[$
$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\,1\,;\,+\infty\,[$

6) Conséquences graphiques :

a) Dans un repère orthonormal, la courbe de la fonction ln et celle de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première diagonale).



b) On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe de la fonction ln .

c) $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f''(x) < 0$ sur $]0 ; +\infty[$

donc f est concave sur $]0 ; +\infty[$. **La fonction logarithme népérien est concave sur $]0 ; +\infty[$.**

III. Relations fonctionnelles de la fonction ln:

Elles découlent des propriétés de la fonction exponentielle.

1) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.**

Posons $A = \ln(ab)$. $e^A = ab$. $B = \ln a + \ln b$ $e^B = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$.

Donc $e^A = e^B$ donc $A = B$.

2) **Pour tout $a > 0$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.**

$\frac{1}{a} \times a = 1$ donc $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln\frac{1}{a} + \ln a = 0$ donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

3) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$**

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

4) **Pour tout a> 0 et n entier relatif , $\ln(a^n) = n \ln a$.**

Si n = 2 $a^2 = a \times a$ donc $\ln(a^2) = \ln a + \ln a = 2 \ln a$
Si n = 3 $a^3 = a^2 \times a$ donc $\ln(a^3) = \ln a^2 + \ln a = 2 \ln a + \ln a = 3 \ln a$ …
Pour $n \in \mathbb{N}$, on fait une récurrence : (P_n) : $\ln(a^n) = n \ln(a)$
n = 0 $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$ donc (P_0) est vraie.
On suppose que la propriété est vraie pour un certain naturel k et on démontre au rang k + 1.
$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k \ln(a) + \ln(a) = (k+1) \ln(a)$
(P_0) est vraie, (P_n) est héréditaire donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

Si n est un entier négatif , alors $-n \in \mathbb{N}$. Donc $\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$
Or $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n)$ donc $-\ln(a^n) = -n \ln(a)$.
donc pour n entier négatif on a $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
Conclusion : **Pour tout a> 0 et n entier relatif , $\ln(a^n) = n \ln a$.**

5) **Pour tout a> 0 $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$**

$(\sqrt{a})^2 = a$ donc $\ln(\sqrt{a})^2 = \ln a$ donc $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a$ donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$