LES FONCTIONS AFFINES

I. Caractérisation d'une fonction affine :

1) Quelques définitions :

Soit m et p deux réels.
La fonction f telle que $f(x) = mx + p$ est appelée fonction affine.
Son ensemble de définition est $D_f =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

m est appelé coefficient directeur. p est appelé ordonnée à l'origine.

Cas particuliers :

Si m = 0 alors $f(x) = p$ est une fonction constante.
Si p = 0 alors $f(x) = m\,x$ est une fonction linéaire.

Exemple : Compléter le tableau suivant :

Fonction	Affine (oui–non)	Linéaire (oui–non)	Constante (oui–non)	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
$f(x) = -5x + 2$	*oui*	*non*	*non*	*– 5*	*2*
$g(x) = 3$	*oui*	*non*	*oui*	*0*	*3*
$h(x) = 4x$	*oui*	*oui*	*non*	*4*	*0*
$k(x) = 7 - 2x$	*oui*	*non*	*non*	*–2*	*7*
$r(x) = \frac{7}{x} - 2$	*non*	*non*	*non*		
$s(x) = \frac{1}{2}x - 6$	*oui*	*non*	*non*	$\frac{1}{2}$	*– 6*

2) Propriété caractéristique d'une fonction affine :

***f* est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.**

***f* est une fonction affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.**

Démonstration (à na pas connaitre par cœur):

Implication : si f affine alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

Posons $f(x) = m\,x + p$. Alors $f(b) = m\,b + p$ et $f(a) = m\,a + p$.
Donc $f(b) - f(a) = mb + p - ma - p = mb - ma = m(b - a)$
Et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$ donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est bien une constante.

Réciproque : si le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant alors f est une fonction affine.

Si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant, avec $b \neq a$, cela signifie que

Pour tout réel $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est constant.

On peut donc poser $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$ avec c un réel.

On a alors $f(x) - f(a) = c(x - a)$ donc $f(x) = c\,x \underbrace{- c\,a + f(a)}_{\text{constante}} = c\,x + d$.

On retrouve donc l'écriture d'une fonction affine.

Si $x = a$, on pose $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = c$ et on reproduit le même raisonnement.

3) Conséquence :

Si on connait les images de a et b deux réels distincts par une fonction affine f alors

$f(x) = m\,x + p$ avec $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $p = f(a) - m\,a$ *ou* $p = f(b) - m\,b$.

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(5) = 1$ et $f(-2) = 3$. Retrouver l'expression de f.

$$f(x) = m\,x + p \quad \text{avec} \quad m = \frac{f(5) - f(-2)}{5 + 2} = \frac{1 - 3}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$p = f(5) + \frac{2}{7} \times 5 = 1 + \frac{10}{7} = \frac{7}{7} + \frac{10}{7} = \frac{17}{7} \quad \text{donc} \quad f(x) = -\frac{2}{7}x + \frac{17}{7}$$

II. Représentation graphique d'une fonction affine :

Une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m\,x + p$ est représentée par une droite d'équation $y = m\,x + p$,

qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; p).

Cas particuliers :

si f est linéaire, p = 0 et la droite représentant f passe par l'origine.

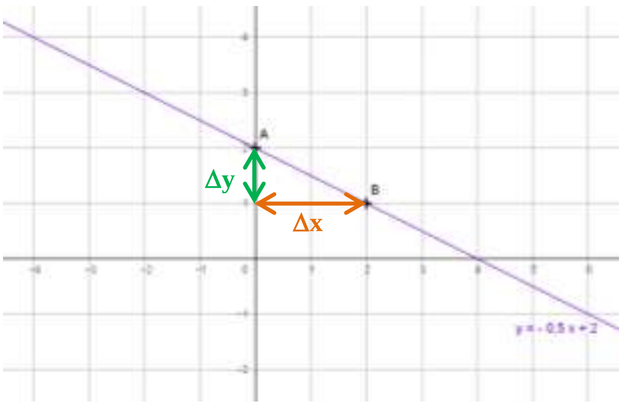
si f est constante, m = 0 et la droite représentant f est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour tracer la droite représentant une fonction affine f, il suffit de placer deux points

A (a ; f(a)) et B (b ; f(b)).

Exemple : Représenter la fonction f définie par : $f(x) = -0{,}5\,x + 2$.

- *On choisit deux abscisses, par exemple 0 et 2.*
- *On calcule $f(0)$ et $f(2)$. $f(0) = -0{,}5 \times 0 + 2 = 2$ et $f(2) = -0{,}5 \times 2 + 2 = -1 + 2 = 1$*
- *On place les deux points A (0 ; 2) et B (2 ; 1) et on trace la droite (AB).*



Remarque : $m = -0{,}5 = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et $p = f(0)$.

Cette remarque permet de lire dans de très nombreux cas l'équation de la droite dessinée.

Exemple : Soit A (5 ; −2) et B (−1 ; 3) deux points du plan. Déterminer l'équation de la droite (AB) .

La droite (AB) a une équation de la forme $y = m\,x + p$.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{5-(-1)} = \frac{-5}{6} \quad \text{donc on a} \quad y = \frac{-5}{6}\,x + p$$

$$A \in (AB) \text{ donc } y_A = \frac{-5}{6}\,x_A + p \text{ donc } -2 = \frac{-5}{6} \times 5 + p \quad \text{d'où} \quad p = -2 + \frac{25}{6} = \frac{13}{6}$$

La droite (AB) a pour équation $y = \frac{-5}{6}x + \frac{13}{6}$

III. Etude d'une fonction affine :

1) Variations d'une fonction affine *f* définie sur IR par *f*(*x*) = m *x* + p :

Si m > 0 la fonction affine *f* est strictement croissante sur IR.
Si m < 0 la fonction affine *f* est strictement décroissante sur IR.
Si m = 0 la fonction affine *f* est constante sur IR.

Tableau de variations si m > 0

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de *f*	↗	

Tableau de variations si m < 0

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de *f*	↘	

Démonstration : Soit a et b deux réels tels que a < b.
Si m > 0 alors m a < m b donc m a + p < m b + p donc *f*(a) < *f*(b)
l'ordre n'est pas perturbé,
la fonction est croissante.

Si m < 0 alors m a > m b donc m a + p > m b + p donc *f*(a) > *f*(b)
l'ordre est perturbé,
la fonction est décroissante.

Exemple : Compléter les tableaux de variations de *f* et *g* définies sur IR par *f*(*x*) = 3 – 2*x* et *g*(*x*) = 5x + 4

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de *f*	↘	

Pour f m = – 2 donc m < 0
f est décroissante sur IR

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de *g*	↗	

Pour g m = 5 donc m > 0
g est croissante sur IR

2) Parité d'une fonction affine *f* définie sur IR par *f*(*x*) = m *x* + p :

Parmi les fonctions affines, seules les fonctions linéaires sont impaires
et seules les fonctions constantes sont paires.

Démonstration :
Une fonction linéaire est impaire. En effet si *f*(*x*) = m*x* alors *f*(–*x*) = – mx = – *f*(*x*)
Une fonction constante est paire. En effet si *f*(*x*) = p alors *f*(–*x*) = p = *f*(*x*)
Réciproquement:

- si *f* est impaire alors *f*(–***x***) = – *f*(***x***) pour tout les réels ***x***
  donc – mx + p = – mx – p donc 2p = 0 donc p = 0. La fonction *f* est donc linéaire.
- si *f* est paire alors *f*(– ***x***) = *f*(***x***) pour tout les réels ***x***
  donc – mx + p = mx + p donc – mx = mx donc 2mx = 0 pour tout ***x*** donc m = 0.
  La fonction *f* est donc constante.

3) Signe d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = mx + p$:

Si $m \neq 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$ La fonction f s'annule pour $x = -\frac{p}{m}$

Si $m \neq 0$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow mx + p > 0 \Leftrightarrow mx > -p$

si $m > 0$ $mx > -p \Leftrightarrow x > -\frac{p}{m}$ f sera positive sur $\left]-\frac{p}{m} ; +\infty\right[$

si $m < 0$ $mx > -p \Leftrightarrow x < -\frac{p}{m}$ f sera positive sur $\left]-\infty ; -\frac{p}{m}\right[$

Si $m \neq 0$ $f(x) < 0 \Leftrightarrow mx + p < 0 \Leftrightarrow mx < -p$

si $m > 0$ $mx < -p \Leftrightarrow x < -\frac{p}{m}$ f sera négative sur $\left]-\infty ; -\frac{p}{m}\right[$

si $m < 0$ $mx < -p \Leftrightarrow x > -\frac{p}{m}$ f sera négative sur $\left]-\frac{p}{m} ; +\infty\right[$

Si $m = 0$ f est constante, $f(x) = p$ donc f est du même signe que p.

Tableau de signes si $m > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
signe de $f(x) = mx + p$		$-$	0	$+$	

Tableau de signes si $m < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
signe de $f(x) = mx + p$		$+$	0	$-$	

Remarque : à droite du 0, on retrouve toujours le signe de m.

Exemple : Compléter le tableau de signes de la fonction affine f définie sur IR par $f(x) = -3x + 8$

x	$-\infty$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x) = -3x + 8$		$+$	0	$-$	

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 8 = 0 \Leftrightarrow -3x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow -3x + 8 > 0 \Leftrightarrow -3x > -8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -3x + 8 < 0 \Leftrightarrow -3x < -8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$

IV. Applications du signe d'une fonction affine aux résolutions d'inéquations :

1) Signe d'un produit :

Exemple : Résoudre l'inéquation $(5x-2)(-3x+4)<0$

Il faut étudier le signe de chacun des facteurs du produit.

$5x-2=0 \Leftrightarrow 5\boldsymbol{x}=2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\frac{2}{5}$

$5x-2>0 \Leftrightarrow 5\boldsymbol{x}>2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}>\frac{2}{5}$

ou $m=5$ et $p=-2$ $\quad -\frac{p}{m}=\frac{2}{5}$

$-3\boldsymbol{x}+4=0 \Leftrightarrow -3\boldsymbol{x}=-4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\frac{4}{3}$

$-3\boldsymbol{x}+4>0 \Leftrightarrow -3\boldsymbol{x}>-4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}<\frac{4}{3}$

ou $m=-3$ et $p=4$ $\quad -\frac{p}{m}=\frac{4}{3}$

Il faut faire un tableau regroupant les signes des deux facteurs et le signe de leur produit.

	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
signe de $5\boldsymbol{x}-2$		$-$	0	$+$		$+$ signe de m	
signe de $-3\boldsymbol{x}+4$		$+$		$+$	0	$-$ signe de m	
signe de $(5\boldsymbol{x}-2)(-3\boldsymbol{x}+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit *strictement négatif*. C'est le cas sur $]-\infty;\frac{2}{5}[$ et sur $]\frac{4}{3};+\infty[$

Donc on écrit **S =** $\boldsymbol{]-\infty;\frac{2}{5}[\cup]\frac{4}{3};+\infty[}$

2) Signe d'un quotient :

Exemple : Résoudre l'inéquation $\frac{4-2x}{7x+3}\geq 0$

Il faut étudier le signe de chacun du numérateur et du dénominateur.

$4-2x=0 \Leftrightarrow -2\boldsymbol{x}=-4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\frac{4}{2}=2$

$4-2x>0 \Leftrightarrow -2\boldsymbol{x}>-4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}<2$

ou $m=-2$ et $p=4$ $\quad -\frac{p}{m}=\frac{4}{2}=2$

$7\boldsymbol{x}+3=0 \Leftrightarrow 7\boldsymbol{x}=-3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=-\frac{3}{7}$

ATTENTION $-\frac{3}{7}$ est une valeur interdite

(un dénominateur ne peut pas être nul)

$7\boldsymbol{x}+3>0 \Leftrightarrow 7\boldsymbol{x}>-3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}>-\frac{3}{7}$

ou $m=7$ et $p=3$ $\quad -\frac{p}{m}=-\frac{3}{7}$

Il faut faire un tableau regroupant les signes des numérateurs et dénominateurs et le signe du quotient.

	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		2		$+\infty$
signe de $4-2x$		$+$		$+$	0	$-$ signe de m	
signe de $7x+3$		$-$	0	$+$ signe de m		$+$	
signe de $\frac{4-2x}{7x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

V.I

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit *positif ou nul*. C'est le cas sur $]-\frac{3}{7};2]$. Donc on écrit **S =** $]-\frac{3}{7};2]$.

V. Utilisation de la calculette :

- Pour rentrer une fonction dans la calculette, on va dans le menu $f(x)$
  et on rentre l'expression de la fonction dans Y1 par exemple.
- On peut afficher la droite représentative en appuyant sur graphe.
- On peut afficher un tableau de valeurs en appuyant sur Table (2$^{\text{nde}}$ graphe)
- On peut résoudre des équations en choisissant le menu résol puis 2: PlySmlt2 puis 1 : Racines d'un polynome
  on choisit DEGRE 1 REEL AUTO NORMAL FLOTT
  puis SUIV. en appuyant sur la touche graphe
  on rentre l'équation à résoudre
  puis RESOL en appuyant sur la touche graphe
  La solution s'affiche.

EXERCICES A FAIRE

Les parcours vert, orange, et rouge sont bien !

Parcours vert :

n° 33 page 106 Calcul littéral
n° 39 page 107 Tableau de valeurs
n° 42 page 107 Retrouver une fonction affine avec 2 images
n° 50 page 108 Lecture graphique et résolution équation et inéquation
n° 56 page 109 Résolution graphique équation et inéquation
n° 63 page 110 Variations
n° 88 page 112 Python

Parcours orange :

n° 41 page 107 Démonstration, contraposée, réciproque
n° 58 page 109 Raisonnement à partir d'images
n° 66 page 110 Raisonnement à partir d'un tableau de signes
n° 68 page 110 Variation d'une somme de deux affines
n° 70 page 110 Algorithmique
n° 74 page 111 Résolution d'inéquations avec produits
n° 87 page 112 Problème complet avec des coûts.

Parcours rouge :

n° 45 page 107 Raisonnement à partir d'un problème
n° 53 page 108 Raisonnement à partir de la calculette
n° 61 page 109 Comparaison d'images à partir des variations
n° 80 page 111 Famille de fonctions f_n
n° 82 page 111 Variations et composition de deux fonctions
n° 86 page 112 Problème complet (aires)
n° 91 page 114 Problème complet (aires)

Voir aussi les exercices transversaux .

n° 1 page 322 Avec une fonction affine et un paramètre.
n° 3 page 322 Problème complet.
n° 7 page 324 Avec des statistiques.
n° 9 page 325 Avec des pourcentages et des taux réciproques.
n° 18 page 328 Avec des pourcentages et des taux réciproques.