

CHAPITRE 4 CONTINUITE

I. Notion de continuité :

1) Définition :

a) Continuité en un point et sur un intervalle :

On dira qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue en un point a de I si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

On dira qu'une fonction f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est continue en tout réel a de I .

b) Conséquence graphique :

Si une fonction est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

c) Continuité des fonctions usuelles :

Les fonctions usuelles (ou de référence) sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble de définition.

Toutes les fonctions obtenues à partir des fonctions usuelles, par opérations (somme, différence, produit , quotient) ou composition sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble de définition.

2) Continuité et dérivabilité :

**Propriété admise : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel de I .
Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .**

ATTENTION : La réciproque est fausse !

La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty [$ mais pas dérivable en 0.

Démonstration :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Continuité en 0 :

$f(0) = 0$ donc f est définie en 0 donc f est continue sur $[0 ; +\infty [$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

0 est une valeur interdite de $f'(x)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

f est donc dérivable sur $] 0 ; +\infty [$.

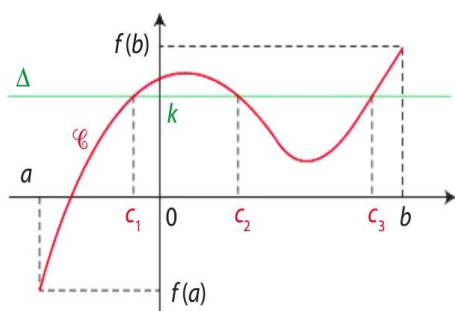
II. Théorème des valeurs intermédiaires :

1) Théorème (admis) :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a et b deux réels de I .
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Donc : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .

$f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.



x	a	c_1	c_2	c_3	b
variations de f	$f(a)$	$\nearrow k$	$\searrow k$	$\nearrow k$	$f(b)$

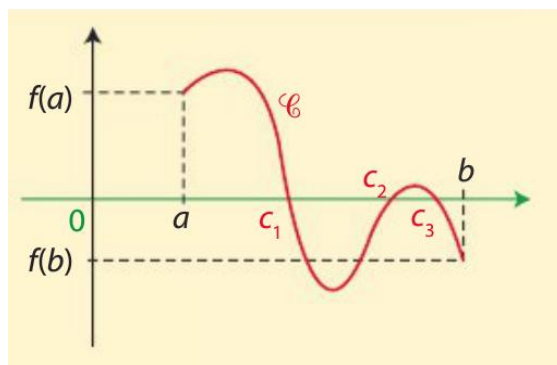
Conséquence graphique : la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe représentative de f en un point dont l'abscisse est comprise entre a et b .

Cas particulier : $k = 0$.

Pour montrer que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on peut dire que :

$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires ou que le produit $f(a) \times f(b)$ est alors négatif.

Si c'est le cas, on en déduira qu'il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.



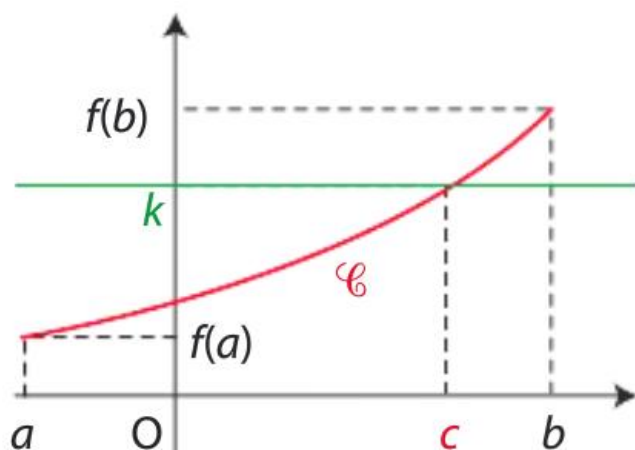
2) Cas des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle :

Théorème de la valeur intermédiaire :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$ de $\mathbb{R}$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Exemple: si f est strictement croissante sur $[a ; b]$.



x	a	c	b
variations de f	$f(a)$	k	$f(b)$

Remarque : Si f est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur $[a ; b]$ on dit qu'elle réalise une bijection de l'intervalle $[a ; b]$ sur l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$ (respectivement $[f(b) ; f(a)]$).
C'est pourquoi ce théorème porte aussi le nom de théorème de la bijection.
La fonction, qui, a tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, associe son unique antécédent, est la fonction réciproque de f , notée f^{-1} .

Convention : **Les flèches d'un tableau de variation indiquent la continuité et la stricte monotonie de la fonction .**

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-5 ; 5]$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 3) - 2x(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 6}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$(x^2 + 3)^2 > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$.

x	-5	$-\sqrt{3}$	α	$\sqrt{3}$	β	5
signe de $3 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0,4$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0,4$	$\frac{5}{14}$

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0,4$ admet exactement deux solutions α et β dont on déterminera un encadrement à 10^{-2} près.

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-5 ; -\sqrt{3}]$

Le maximum de f sur cet intervalle est $-\frac{5}{14} \approx -0,357$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il n'existe aucune solution à l'équation $f(x) = 0,4$ dans $[-5 ; -\sqrt{3}]$.

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$.

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0,577 ; f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577 \text{ et } 0,4 \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}].$$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel α appartenant à $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ tel que $f(\alpha) = 0,4$.

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{3}; 5]$.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577 ; f(5) = \frac{5}{14} \approx 0,357 \text{ et } 0,4 \in [\frac{5}{14}; \frac{\sqrt{3}}{3}].$$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel β appartenant à $[\sqrt{3}; 5]$ tel que $f(\beta) = 0,4$.

Donc sur $[-5; 5]$ $f(x) = 0,4$ admet exactement deux solutions.

D'après la calculatrice, $0 < \alpha < 1$; $0,6 < \alpha < 0,7$; $0,69 < \alpha < 0,70$

$4 < \beta < 5$; $4,3 < \beta < 4,4$; $4,30 < \beta < 4,31$

3) Extension du théorème de la valeur intermédiaire à des intervalles non fermés ou non bornés :

• $I = [a; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	a	c	$+\infty$
f	$f(a)$	k	$+\infty$

Pour tout nombre réel $k \geq f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $[a; +\infty[$.

• $I = [a; b[$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$$

x	a	c	b
f	$f(a)$	k	ℓ

Pour tout nombre réel k dans $[f(a); \ell[$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $[a; b[$.

• $I =]-\infty; b[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$	c	b
f	ℓ	k	$-\infty$

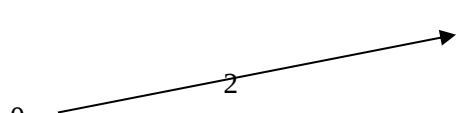
Pour tout nombre réel $k < \ell$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $]-\infty; b[$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 5}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 5) - 3e^x(e^x)}{(e^x + 5)^2} = \frac{3e^{2x} + 15e^x - 3e^{2x}}{(e^x + 5)^2} = \frac{15e^x}{(e^x + 5)^2}$$

$(e^x + 5)^2 > 0$ et $15e^x > 0$ donc $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+		
variations de f			

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 5 = 5 \text{ donc par quotient } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 5} = \frac{3e^x}{e^x(1 + \frac{5}{e^x})} = \frac{3}{1 + \frac{5}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{e^x} = 1 \text{ donc par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

- 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-1} près.

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \text{ et } 2 \in [0; 3].$$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel α appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 2$.

D'après la calculette, $2 < \alpha < 3$; $2,3 < \alpha < 2,4$; $2,30 < \alpha < 2,31$ donc $\alpha \approx 2,3$

III. Applications :

1) Résolution d'équations :

Le théorème de la valeur intermédiaire va permettre de justifier de l'existence et du nombre de solutions d'une équation. On pourra ensuite en donner des valeurs approchées grâce à la calculette.

Exemple :

Montrer que l'équation $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2; 4]$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution.

On pose $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ et on étudie cette fonction sur $[2; 4]$.

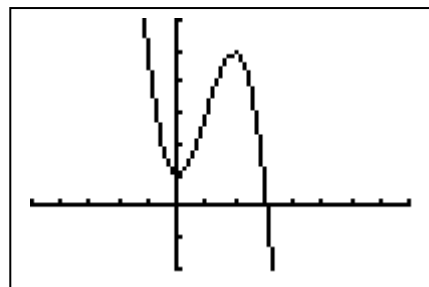
f est continue sur $[2; 4]$ comme somme de fonctions polynômes continues sur $[2; 4]$.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2) \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Sur $[2; 4]$ $3x > 0$ et $-x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ donc sur $[2; 4]$ $-x + 2 < 0$

Tableau de variations :

x	2	α	4
signe de $3x$	+		
signe de $-x + 2$	-		
signe de $f'(x)$	0	-	
variations de f	5	0	-15



La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$.

$$f(2) = 5 \text{ et } f(4) = -15. \quad 0 \in [-15; 5].$$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel α appartenant à $[2; 4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

α est l'unique solution de l'équation $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$.

Pour encadrer α à 10^{-2} près on utilise la table de la calculatrice.

On sait que $2 < \alpha < 4$.

Avec un pas de 0,1 on a $3,1 < \alpha < 3,2$.

Avec un pas de 0,01 on a $3,10 < \alpha < 3,11$.

X	Y1
2.8	2.568
2.9	1.841
3.	1
3.1	.039
3.2	-1.048
3.3	-2.267
3.4	-3.624
Y1 = .039	

X	Y1
3.05	.53488
3.06	.43818
3.07	.34026
3.08	.24109
3.09	.14067
3.1	.039
3.11	-.0639
Y1 = .039	

On en déduit donc que $\alpha \approx 3,1$ à 10^{-1} près.

Remarque :

Pour pouvoir donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α ,
il faudra trouver un encadrement à 10^{-2} près de α .

2) Suites et continuité :

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

(u_n) est une suite de termes appartenant à I.

a est un réel appartenant à I.

Si (u_n) est une suite convergente vers a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple : (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{4n}{n+1}$.

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

$$4n \geq 0 \text{ et } n+1 \geq 0 \text{ donc } u_n \geq 0$$

2) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$u_n = \frac{4n}{n+1} = \frac{4n}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{4}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

La suite (u_n) est convergente de limite 4.

3) On pose (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $v_n = f(u_n)$.

Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

Sur $[0; +\infty[$ la fonction f est continue (fonction de référence).
pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$ donc $u_n \in [0; +\infty[$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

donc la suite $v_n = f(u_n)$ est convergente de limite $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

3) Théorème du point fixe :

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans I .

(u_n) est une suite de premier terme u_0 appartenant à I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ℓ est un réel appartenant à I .

Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple : (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

1) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \quad f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

Posons : (P_n) la propriété : " pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ "

Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = 2$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$
donc la propriété est vraie pour $n = 0$. P_0 est vraie.

Hérédité

On suppose qu'il existe un certain entier k , tel que $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 6$.
On veut montrer qu'alors $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6$.

Par définition de la suite, $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_{k+2} = f(u_{k+1})$.

La fonction f étant continue, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 6 & \text{ donc } f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(6) \\ & \quad 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4 \\ & \text{ donc } 0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6 \end{aligned}$$

Si P_k est vraie pour un certain k , alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion :

Comme la propriété est vraie pour $n = 0$, et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tout n .

On a donc, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on notera ℓ .

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 6
donc elle est convergente.

4) Déterminer la valeur de ℓ .

Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 2 = x \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = -2 \Leftrightarrow x = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

Donc la suite (u_n) est convergente de limite 3.