TSpé SUITES Exercices plus difficiles

Exercice 1 :

u est la suite définie par $u_0 = 13$ et, pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n,

$$u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

En déduire le sens de variation et la limite de la suite u.

Exercice 2 :

u est la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}2\,u_n + 0{,}6$$

1. a) Démontrer que la suite v définie par $v_n = u_n - 0{,}75$ est géométrique.

b) En déduire la limite de la suite v.

2. a) Déterminer u_n en fonction de n.

b) En déduire en fonction de n, l'expression de :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

c) Quelle est la limite de la suite S ?

Exercice 3 :

1. Démontrer que si une suite u est majorée par M et converge vers le nombre réel ℓ, alors $\ell \leqslant M$.
On admettra que si u est de plus minorée par m, alors $m \leqslant \ell \leqslant M$.

2. f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

et u est la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Voici l'expression de $f'(x)$ obtenue avec le logiciel Xcas.

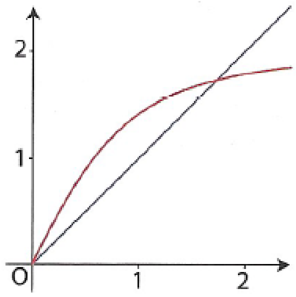
1 simplifier(deriver(2x/sqrt(x^2+1)))

$$\frac{2\cdot\sqrt{x^2+1}}{x^4+2\cdot x^2+1}$$

Utiliser ces résultats pour dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire que si $0 < x < 2$, alors

$$0 < f(x) < 2$$

b) La figure ci-dessous montre la courbe de f et la droite d'équation $y = x$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.



c) Donner une valeur approchée de u_1 et montrer que la suite u est croissante et bornée entre 0 et 2.

d) Démontrer que la suite u est convergente. Écrire un encadrement de sa limite ℓ.

e) La suite u converge-t-elle vers 2 ? Justifier.

Exercice 4 :

u est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

Pour tout nombre entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 puis S_0, S_1, S_2 et S_3.

2. a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n > 0$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 5$, $u_n > n - 3$.

c) En déduire la limite de la suite u.

3. v est la suite définie pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) En déduire que pour tout nombre entier naturel n :

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

c) Exprimer S_n en fonction de n. Étudier la limite de la suite (S_n).

Exercice 5 :

1. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que si la suite u est décroissante et converge vers le nombre réel ℓ, alors pour tout nombre entier naturel n, $u_n \geqslant \ell$.

2. La suite u est définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

a) Dresser le tableau de variation de $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ sur l'intervalle $[1\,;2]$.

b) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [1\,;2]$.

c) Établir, pour tout nombre entier naturel n, la relation :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)\,(u_n - 1)$$

d) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6 :

u est la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout n de $\mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 0$ et $a \neq 1$).

1. Montrer que si u est convergente, alors sa limite est la solution α d'une équation de degré 1.

2. Que se passe-t-il si $u_0 = \alpha$?

On suppose par la suite que $u_0 \neq \alpha$.

3. a) Démontrer que la suite $v = u - \alpha$ est géométrique.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. Pour quelles valeurs de a la suite u est-elle convergente ? Quelle est alors sa limite ?

Exercice 7 :

u est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{0{,}5u_n^2 + 8}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$$

3. a) Justifier que la suite u est convergente.

b) En remarquant que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 0{,}5u_n^2 + 8$, montrer que la limite ℓ de la suite u est solution d'une équation et en déduire la valeur de cette limite.

4. On se propose d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n.

a) v est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 16$.

Démontrer que v est géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 8 :

Une entreprise distribue un produit de consommation courante en grande quantité. Elle décide d'étudier l'impact d'une campagne publicitaire sur quelques semaines.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, p_n est la proportion de consommateurs du produit la semaine n et on admet que $p_{n+1} = 0{,}82\,p_n + 0{,}15$ avec $p_0 = 0{,}25$.

a) Interpréter p_0 dans le contexte de cette campagne publicitaire.

b) Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = p_n - \dfrac{5}{6}$ est géométrique.

c) Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.

d) Quelle est la limite de la suite (p_n)?

e) Interpréter cette limite dans le contexte de l'entreprise.

Exercice 9 :

u est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite u est minorée par 2.

b) Déterminer le sens de variation de u.

c) Démontrer que la suite u ne peut converger vers aucun nombre réel ℓ.

d) Démontrer, en raisonnant par l'absurde que u n'est pas majorée. En déduire la limite de la suite u.

CORRECTION

Exercice 1 :

a) Initialisation : $u_0 = 13$ et

$1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 13$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$u_k = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^k$. Alors

$u_{k+1} = \frac{1}{5}u_k + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\left[1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^k\right] + \frac{4}{5}$

$= 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$

Conclusion : Pour tout nombre entier n,

$u_n = 1 + 12\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$0 < \frac{1}{5} < 1$ donc la suite $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ est décroissante et (u_n) l'est aussi car $12 > 0$

$-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et par opérations $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 2 :

1. a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 0{,}75$
$= 0{,}2u_n + 0{,}6 - 0{,}75$
$= 0{,}2u_n - 0{,}15$
$= 0{,}2(u_n - 0{,}75)$
$= 0{,}2v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,2.

b) $0 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}2^n$ et

$v_0 = u_0 - 0{,}75 = -1{,}75$

$u_n = v_n + 0{,}75$ d'où $u_n = 0{,}75 - 1{,}75 \times 0{,}2^n$

b) $S_n = (v_0 + 0{,}75) + \ldots + (v_n + 0{,}75)$ ($n+1$ termes)

$= (v_0 + \ldots + v_1) + 0{,}75\,(n+1)$

$= -1{,}75\,(1 + 0{,}2 + \ldots + 0{,}2^n) + 0{,}75\,(n+1)$

$= -1{,}75 \times \frac{1 - 0{,}2^{n+1}}{1 - 0{,}2} + 0{,}75n + 0{,}75$

$S_n = -2{,}1875\,(1 - 0{,}2^{n+1}) + 0{,}75n + 0{,}75$

c) $0 < 0{,}2 < 1$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n+1} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}75n + 0{,}75) = +\infty$ d'où

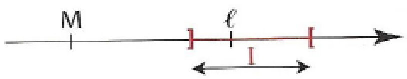
$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Exercice 3 :

DÉMONSTRATION DE (1)

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\ell > M$.

On note I un intervalle ouvert contenant ℓ et qui est inclus dans l'intervalle $]M\,;+\infty[$.

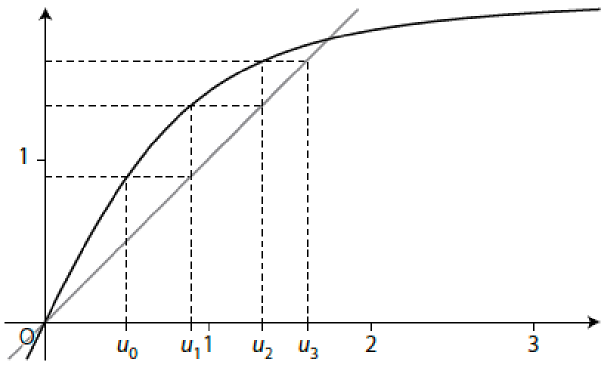


u converge vers ℓ, donc I contient tous les u_n à partir d'un certain rang et ces u_n sont donc supérieurs à M, ce qui est en contradiction avec le fait que u est majorée par M. Donc $\ell \leqslant M$.

2. a) Dans l'expression de la dérivée donnée par le logiciel Xcas, numérateur et dénominateur sont toujours strictement positifs, donc, pout tout $x \in [0\,;\infty[$; $f'(x) > 0$.

Ainsi, $f(0) = 0$ et $f(2) = \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$, donc si $0 < x < 2$, alors $0 < f(x) < 2$.

b)



c) • $u_1 = f(u_0) = \frac{2 \times 0{,}5}{\sqrt{0{,}5^2 + 1}} \approx 0{,}89$.

• On démontre, sans difficulté, par récurrence, que u est bornée entre 0 et 2 (en utilisant le **2. a)**).

• Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2 \times u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - u_n = u_n \times \frac{2 - \sqrt{u_n^2 + 1}}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$

Or, $0 < u_n < 2$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$, ainsi $u_{n+1} > u_n$, la suite u est donc croissante.

d) La suite u est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel ℓ.

De plus, d'après le **1.**, $0 < \ell < 2$.

e) Si la suite u convergeait vers 2, alors on aurait $f(2) = 2$, ce qui n'est pas le cas. Donc la suite u ne converge pas vers 2.

Exercice 4 :

1. $u_1=-\frac{5}{3}$; $u_2=-\frac{14}{9}$; $u_3=-\frac{14}{27}$; $S_0=1$; $S_1=-\frac{2}{3}$; $S_2=-\frac{20}{9}$; $S_3=-\frac{74}{27}$

2. a) Pour $n=4$: $u_4=\frac{67}{27}>0$ et si $k\geqslant 4$ avec $u_k>0$ alors $u_{k+1}=\frac{1}{3}u_k+(k-2)$ ainsi par initialisation et hérédité, $u_n>0$ pour tout nombre entier n, $n\geqslant 4$.

b) On déduit du **a)** que si $n\geqslant 4$, $u_{n+1}>n-2$, soit $u_{n+1}>(n+1)-3$ et l'inégalité $u_n>n-3$ est vérifiée pour tous les nombres entiers de la forme $(n+1)$ avec $n\geqslant 4$. Soit pour tout n, $n\geqslant 5$; $u_n>n-3$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-3)=+\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

3. a) Pour $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=-2\left(\frac{1}{3}u_n+n-2\right)+3(n+1)-\frac{21}{2}$

$$=-\frac{2}{3}u_n+n-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2u_n+3n-\frac{21}{2}\right)$$

D'où $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$. La suite v est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $v_0=-2u_0-\frac{21}{2}=-\frac{25}{2}$

b) Pour tout n, $v_n=v_0\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

d'où $2u_n=\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+3n-\frac{21}{2}$ et $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

c) $S_n=\frac{25}{4}\left[1+\frac{1}{3}+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+\frac{3}{2}[0+1+\ldots+n]$

$-\frac{21}{4}[1+\ldots+1]$ en réorganisant la somme

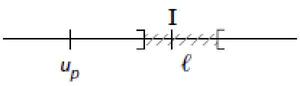
$$=\frac{25}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{21}{4}(n+1)$$

car $(n+1)$ termes et formule vue en Première

$$=\frac{75}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]+\frac{3(n+1)}{4}(n-7)$$

Exercice 5 :

1. Si on peut trouver un nombre entier p tel que $u_p<\ell$ alors il existe un intervalle ouvert I qui contient ℓ et qui ne contient pas u_p.



$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ donc, à partir d'un certain rang k, on a $u_n\in$ I

$(u_n)_n$ est décroissante donc si $n\geqslant p$ alors $u_n\leqslant u_p$ et $u_n\notin$ I d'où contradiction pour $n\geqslant p$ et $n\geqslant k$.

2. a)

x	1	2
f'	+	
f	1 ↗	2

Pour $x\in[1\,;2]$, $f'(x)=2(x-1)\geqslant 0$

$f(1)=1$ et $f(2)=2$

Remarque : si $k\in[1\,;2]$, $f(x)\in[1\,;2]$

b) Par récurrence : $u_0\in[1\,;2]$ et si $u_k\in[1\,;2]$, alors $f(u_k)\in[1\,;2]$ soit $u_{k+1}\in[1\,;2]$.

c) $u_{n+1}-u_n=u_n^2-3u_n+2$ et $(u_n-2)(u_n-1)=u_n^2-3u_n+2$, donc pour tout n, $u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$

d) Comme $1\leqslant u_n\leqslant 2$, on a $u_n-1\geqslant 0$ et $u_n-2\leqslant 0$, donc $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ ceci pour tout nombre entier n donc la suite u est décroissante, elle est aussi minorée par 1 donc elle est convergente vers un réel ℓ qui vérifie $1\leqslant\ell\leqslant 2$ et qui est un minorant de la suite u car 1°.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2-2u_n+2)=\ell^2-2\ell+2$

donc $\ell=\ell^2-2\ell+2$

Cette équation admet deux solutions 1 et 2 mais ℓ est un minorant de la suite u, donc $\ell=1$.

Exercice 6 :

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} (au_n + b) = a\ell + b$ donc par unicité de la limite d'une suite, $\ell = a\ell + b$. L'équation $x = ax + b$ équivaut à $x(1 - a) = b$ et pour $a \neq 1$ elle a une solution unique $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

2. Si $u_0 = \alpha$, alors $u_1 = \alpha$ et plus généralement si pour un nombre entier k, $u_k = \alpha$ alors $u_{k+1} = \alpha$ donc par récurrence si $u_0 = \alpha$, pour tout nombre entier n, $u_n = \alpha$ et la suite u est constante.

3. a) On écrit pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \leftarrow \text{énoncé} \\ \alpha = a\alpha + b \quad \leftarrow \text{car } \alpha \text{ solution de l'équation } x = ax + b \end{cases}$$

Une différence membre à membre donne $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$, donc la suite v est géométrique de raison a.

b) On en déduit pour tout nombre entier n, $v_n = v_0 \times a^n$ soit $v_n = (u_0 - \alpha) \times a^n$ et $u_n = v_n + \alpha$ d'où $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha) \times a^n$.

4. (u_n) est convergente lorsque la suite (a^n) est convergente, c'est-à-dire pour $-1 < a < 1$ dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 7 :

1. $u_1 = \sqrt{8}$; $u_2 = \sqrt{12}$

2. $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8$ et si $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 8$ alors

$\sqrt{8} \leqslant \sqrt{0{,}5u_k^2 + 8} \leqslant \sqrt{0{,}5u_{k+1}^2 + 8} \leqslant \sqrt{0{,}5 \times 8^2 + 8}$

soit $0 \leqslant \sqrt{8} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \sqrt{40} \leqslant 8$ et par récurrence pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$

3. a) La suite u est croissante et majorée par 8, donc elle converge vers un réel ℓ et $0 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{8}$.

b) $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$ et $\lim_{n\to+\infty} (0{,}5u_n^2 + 8) = 0{,}5\ell^2 + 8$ donc $\ell^2 = 0{,}5\ell^2 + 8$ soit $\dfrac{1}{2}\ell^2 = 8 = \ell^2 = 16$ et $\ell = 4$ car $\ell \geqslant 0$.

4. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (0{,}5\,u_n^2 + 8) - 16$

$= 0{,}5u_n^2 - 8$

$= 0{,}5(u_n^2 - 16)$

donc $v_{n+1} = 0{,}5v_n$ ceci pour tout nombre entier n.

La suite v est géométrique de raison 0,5.

b) $v_0 = u_0^2 - 16$ donc pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -16 \times (0{,}5)^n$ et $u_n^2 = v_n + 16 = 16[1 - (0{,}5)^n]$

On a $u_n \geqslant 0$ donc $u_n = 4\sqrt{1 - (0{,}5)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 8 :

a) $p_0 = 0{,}25$ indique que au démarrage de la campagne 25 % de la population considérée achètent le produit.

b) $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{5}{6}$

$$\begin{aligned} &= 0{,}82p_n + 0{,}15 - \frac{5}{6} \\ &= 0{,}82\left(u_n + \frac{5}{6}\right) + 0{,}15 - \frac{5}{6} \text{ car } p_n = u_n + \frac{5}{6} \\ &= 082u_n + \frac{5}{6}(0{,}82 - 1) + 0{,}15 \\ &= 0{,}82u_n - \frac{5}{6} \times 0{,}18 + 0{,}15 \\ &= 0{,}82u_n. \end{aligned}$$

La suite u est géométrique de raison 0,82.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times 0{,}82^n$ avec $u_0 = p_0 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{6} = -\dfrac{7}{12}$ et $p_n = u_n + \dfrac{5}{6}$

soit $p_n = \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{12} \times (0{,}82)^n$

d) $0 < 0{,}82 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}82^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{5}{6}$ or $\dfrac{5}{6} \approx 0{,}83$.

e) Si la campagne dure un grand nombre de semaines, la consommation du produit s'approchera de 83 % de la population. On note donc une bonne efficacité de la campagne.

Exercice 9 :

a) Par récurrence : **Initialisation** $u_0 \geqslant 2$

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \geqslant 2$ montrons que $u_{k+1} \geqslant 2$ c'est-à-dire $u_{k+1} - 2 \geqslant 0$.

Or $u_{k+1} - 2 = \dfrac{u_k^2}{u_k - 1} - 2$

$$= \frac{u_k^2 - 2u_k + 2}{u_k - 1}$$

$$= \frac{(u_k - 1)^2 + 1}{u_k - 1}$$

Or $u_k \geqslant 2$ donc $u_k - 1 > 0$ et on a bien $u_{k+1} - 2 \geqslant 0$

Conclusion : pour tout nombre entier n, $u_n \geqslant 2$. La suite u est minorée par 2.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{u_n - 1} - u_n$

$$= \frac{u_n}{u_n - 1} \text{ or } u_n \geqslant 2$$

donc $u_n > 0$ et $u_n - 1 > 0$.

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite u est croissante (strictement).

c) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors $\ell \geqslant 2$ car (u_n) est minorée par 2 et $\ell = \dfrac{\ell^2}{\ell - 1}$ car unicité de la limite de la suite (u_{n+1}).

Or l'équation $\ell = \dfrac{\ell^2}{\ell - 1}$ admet une unique solution 0. Or $\ell \geqslant 2$ donc ℓ ne peut pas exister. La suite u ne peut converger vers aucun réel ℓ.

d) Si (u_n) est majorée, alors, comme elle est croissante, elle serait convergente et c'est impossible (question **c**). Donc la suite u n'est pas majorée et elle est croissante, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.