TSpé Révisions Suites et continuité

Exercice 1:

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 3}$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) a) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f .

   a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2) a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in [\,2\,;\,5\,]$ pour tout entier $n \geq 1$.

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.

3) a) Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Donner l'équation vérifiée par ℓ et en déduire la valeur de la limite de la suite (u_n).

Exercice 2:

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-3x} + 3x - 5$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations.
2) Démontrer que $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $[\,0\,;\,5\,]$.
3) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4) Etudier la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$.
6) La courbe représentative de g admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation $y = 3x + 2$? Si oui, en quel(s) point(s).

CORRECTION

Exercice 1:

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 3}$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) a) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - x + 3$

$x^2 - x + 3$ est un trinôme de discriminant $\Delta = 1 - 12 = -11$ donc $x^2 - x + 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ donc $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 3}}$

$2\sqrt{x^2 - x + 3} > 0$ et $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	$\frac{\sqrt{11}}{2}$	$\nearrow$	

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 3} = x \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = x^2 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ **S = { 3 }**

2) a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in [2 ; 5]$ pour tout entier $n \geq 1$.

On pose (P_n) la propriété : pour tout $n \geq 1$, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$.

Initialisation : $n = 1$ $u_1 = 2$ et $u_2 = f(2) = \sqrt{5}$; $2 \leq 2 \leq \sqrt{5} \leq 5$ donc (P_1) est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe k entier, $k \geq 1$, tel que (Pk) soit vérifiée c'est-à-dire que $2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$.
Démontrons qu'alors (P_{k+1}) est vérifiée c'est-à-dire que $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 5$.
$2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$. f étant croissante sur $[2 ; 5]$ on a :
$f(2) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(5)$ donc $\sqrt{5} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{23}$.
Or $\sqrt{5} > 2$ et $\sqrt{23} < 5$ donc $2 < \sqrt{5} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{23} < 5$
donc (P_{k+1}) est vérifiée.

Conclusion : (P_1) est vraie et (P_n) est héréditaire donc (P_n) est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.
La suite (u_n) est donc croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et $u_n \in [2 ; 5]$ ($2 \leq u_n \leq 5$)
pour tout entier $n \geq 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.

La suite (u_n) est croissante (car $u_n \leq u_{n+1}$ pour $n \geq 1$) et majorée par 5 (car $u_n \leq 5$ pour $n \geq 1$)
donc **la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle ℓ.**

3) a) Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme justifié en 1)b) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc **elle est continue sur $\mathbb{R}$**.

b) Donner l'équation vérifiée par ℓ et en déduire la valeur de la limite de la suite (u_n).

$u_{n+1} = f(u_n)$ donc d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$. Cette équation a pour solution 3 (d'après 1)b)) donc **$\ell = 3$.**

Exercice 2:

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-3x} + 3x - 5$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations.

$g'(x) = -3e^{-3x} + 3 = 3(1 - e^{-3x})$

Signe de $g'(x)$: $1 - e^{-3x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-3x} \Leftrightarrow e^0 \geq e^{-3x} \Leftrightarrow 0 \geq -3x \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g		↘	-4	↗	

$g(0) = e^0 + 0 - 5 = 1 - 5 = -4$

2) Démontrer que $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $[0 ; 5]$

La fonction g est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $[0 ; 5]$
$g(0) = -4$; $g(5) = e^{-15} + 15 - 5 = e^{-15} + 10 \approx 10$ et $0 \in [f(0) ; f(5)]$
donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 5]$**

3) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

A l'aide de la calculette on obtient **$1{,}66 < \alpha < 1{,}67$**

4) Etudier la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

$g''(x) = 9e^{-3x}$ $g''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc **la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$** .

5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$.

$y = g'(-\frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}) + g(-\frac{1}{3})$ avec $g(-\frac{1}{3}) = e^1 - 1 - 5 = e - 6$ et $g'(-\frac{1}{3}) = 3(1 - e)$

$y = 3(1 - e)(x + \frac{1}{3}) + e - 6$

$y = 3(1 - e)x + 1 - e + e - 6$

$y = 3(1 - e)x - 5$

6) La courbe représentative de g admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation $y = 3x + 2$? Si oui, en quel(s) point(s).

(d) a pour coefficient directeur 3 donc il faut résoudre $g'(x) = 3$
$g'(x) = 3 \Leftrightarrow 3(1 - e^{-3x}) = 3 \Leftrightarrow 1 - e^{-3x} = 1 \Leftrightarrow e^{-3x} = 0$
Or $e^{-3x} > 0$ donc $e^{-3x} = 0$ n'a pas de solution.
La courbe représentative de g n'admet pas de tangente parallèle à la droite (d).