FICHE DE REVISIONS

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur [0 ; 4] par $f(x) = -0{,}5\,x^3 + 2x^2 - x + 1$.

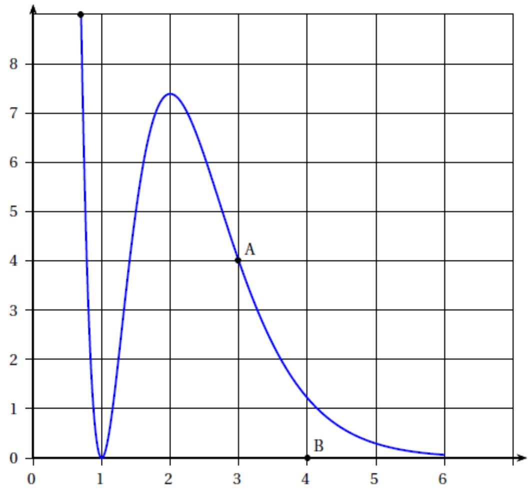
1) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2) En déduire le tableau de variations de f.
   On pourra donner des valeurs approchées à 10^{-1} près dans le tableau de variations.
3) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
4) En déduire que f est convexe sur $[\,0\,;\,\frac{4}{3}\,]$.

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3\,;\,4)$ et $B(4\,;\,0)$. Déterminer $f'(3)$.
2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$.

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)e^{-2x+6}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$.
   On ne demande pas de calculer les ordonnées.

3. Montrer que $f''(x) = 2\,e^{-2x+6}\,(\,2x^2 - 8x + 7\,)$
   - **a.** Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.
   - **b.** La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et étudier leur signe sur l'intervalle I proposé.

1) On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 10$ a une unique solution α dans $[-2 ; 1]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2) On considère la fonction g définie sur $I = [0; 9]$ par $g(x) = \frac{5+x}{1+x}$.
   Dresser le tableau de variation de g.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction d telle que $d(x) = \dfrac{7x - 2}{-6x + 12}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

4) Dresser le tableau de variations de la fonction e telle que $e(x) = (3x - 8)^4$ sur $I = \mathbb{R}$

   Montrer que l'équation $e(x) = 1000$ a une unique solution α dans $[0 ; 2]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5) Dresser le tableau de variations de la fonction k telle que $k(x) = \dfrac{4x - 1}{x^2 + 2}$ sur $I = \mathbb{R}$

CORRECTION

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur [0 ; 4] par $f(x) = -0,5\,x^3 + 2x^2 - x + 1$.

1) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

$f'(x) = -1,5x^2 + 4x - 1$

$f'(x)$ est un trinôme donc pour étudier son signe on cherche ses racines éventuelles.

$\Delta = 10$; $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{10}}{-3} = \dfrac{4+\sqrt{10}}{3} \approx 2,4$ et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{10}}{-3} = \dfrac{4-\sqrt{10}}{3} \approx 0,3$

2) En déduire le tableau de variations de f.
On pourra donner des valeurs approchées à 10^{-1} près dans le tableau de variations.

x	0		$\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$		$\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$		4
signe de $f'(x)$		$-$ (signe de a)	0	+	0	$-$ (signe de a)	
variations de f	1	↘	≈ 0,9	↗	≈ 3,2	↘	-3

3) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
$f''(x) = -3x + 4$.

Pour étudier le signe de $f''(x)$, on résout l'inéquation $f''(x) \geq 0$.
Cela nous permettra de savoir sur quel intervalle f'' est positive et d'en déduire l'intervalle où elle est négative.

$-3x + 4 \geq 0 \iff -3x \geq -4 \iff x \leq \dfrac{4}{3}$

donc **$f''(x)$ est positive sur $\left[0 ; \dfrac{4}{3} \right[$, négative sur $\left] \dfrac{4}{3} ; 4 \right]$ et nulle en $x = \dfrac{4}{3}$.**

4) En déduire que f est convexe sur $\left[0 ; \dfrac{4}{3} \right]$.

$f''(x)$ est positive ou nulle sur $\left[0 ; \dfrac{4}{3} \right]$ donc **f est convexe sur $\left[0 ; \dfrac{4}{3} \right]$.**

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0,7 ; 6] ; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{4-3} = -4$. Donc $f'(3) = -4$.
2. La fonction f est décroissante sur les intervalles [0,7 ; 1] et sur [2 ; 6] ; elle est croissante sur l'intervalle [1 ; 2]. On peut donc en déduire le signe de f' sur l'intervalle [0,7 ; 6].

x	0,7		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

PARTIE B :

1. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\, e^{-2x+6}$ donc $f'(x) = (2x - 2)\, e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1)(-2\, e^{-2x+6})$
$= e^{-2x+6}\,(2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2)$
$= e^{-2x+6}\,(-2x^2 + 6x - 4)$

2. Signe de $f'(x)$: e^{-2x+6} est strictement positif sur [0,7 ; 6].
Donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 6x - 4$ qui est un trinôme.
$\Delta = 36 - 32 = 4$ $\quad x_1 = \dfrac{-6-2}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6+2}{-4} = 1$
On retrouve donc le tableau tracé dans la partie A.

3.Calcul de $f''(x)$: $f''(x) = (-2e^{-2x+6})(-2x^2 + 6x - 4) + e^{-2x+6}(-4x + 6)$
$= e^{-2x+6}\,(4x^2 - 12x + 8 - 4x + 6)$
$= e^{-2x+6}\,(4x^2 - 16x + 14)$
$= 2\, e^{-2x+6}\,(2x^2 - 8x + 7)$

Signe de $f''(x)$: $2\, e^{-2x+6}$ est strictement positive donc $f''(x)$ est du signe de $2x^2 - 8x + 7$ qui est un trinôme.
$\Delta = 64 - 56 = 8 = 4 \times 2$ donc $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$
$x_1 = \dfrac{8 - 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$
D'après le signe du trinôme, $f''(x) \leq 0$ sur $[x_1 ; x_2]$
donc f est concave sur ce même intervalle.
De plus f'' s'annule et change de signe en x_1 et x_2. Donc la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion d'abscisses x_1 et x_2 .

Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et étudier leur signe sur l'intervalle I proposé.

1) On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
Pour étudier le signe de f' il faut étudier le signe du trinôme $6x^2 + 6x - 12$.
$\Delta = 36 + 288 = 324 = 18^2$ $\quad x_1 = \dfrac{-6-18}{12} = -2$; $x_2 = \dfrac{-6+18}{12} = 1$

x	$-\infty$		**-2**		**1**		$+\infty$
signes de $f'(x)$ a = 6		+ signe de a	0	$-$	0	+ signe de a	
variations de f		↗	27	↘	0	↗	

b) Sur [– 2 ; 1], la fonction f est définie, continue (car dérivable) et strictement décroissante.
$f(-2) = 27$; $f(1) = 0$ et $10 \in [0 ; 27]$
Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique α dans $[-2 ; 1]$ tel que $f(\alpha) = 10$.
Grâce à la calculette on a $-1 < \alpha < 0$; $-0{,}3 < \alpha < -0{,}2$; $-0{,}24 < \alpha < -0{,}23$;
$-0{,}239 < \alpha < -0{,}238$ donc une valeur approchée de α est $-0{,}24$ à 10^{-2} près.

2) On considère la fonction g définie sur I = [0; 9] par $g(x) = \frac{5+x}{1+x}$.

Dresser le tableau de variation de g.

$$g'(x) = \frac{1 \times (1+x) - 1 \times (5+x)}{(1+x)^2} = \frac{1+x-5-x}{(1+x)^2} = -\frac{4}{(1+x)^2}$$

Pour étudier le signe d'un quotient, on étudie le signe du numérateur et le signe du dénominateur.
Le numérateur est -4 donc il est négatif.
Le dénominateur est $(1+x)^2$ est un carré donc il est positif.
La dérivée est donc le quotient d'un nombre négatif par un nombre positif donc elle est négative.
Sur [0 ; 9] la fonction g est décroissante.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction d telle que $d(x) = \frac{7x-2}{-6x+12}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$d'(x) = \frac{7(-6x+12) - (7x-2) \times (-6)}{(-6x+12)^2} = \frac{-42x+84+42x-12}{(-6x+12)^2} = \frac{72}{(-6x+14)^2}$$

Pour étudier le signe d'un quotient, on étudie le signe du numérateur et le signe du dénominateur.
Le numérateur est 72 donc il est positif.
Le dénominateur est un carré donc il est positif.
La dérivée est donc le quotient d'un nombre positif par un nombre positif donc elle est positive.
Sur I la fonction d est croissante.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction e telle que $e(x) = (3x-8)^4$ sur $I = \mathbb{R}$

$$e'(x) = 4 \times 3 \times (3x-8)^3 = 12(3x-8)^3$$

Pour étudier le signe d'un produit, on étudie le signe des différents facteurs.
Le premier facteur est 12 donc il est positif.
Le second facteur est $(3x-8)^3$ c'est un cube donc il a le même signe que $3x-8$.
On résout $3x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3}$ donc $3x-8$ est positif si x est supérieur à $\frac{8}{3}$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\boldsymbol{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
signes de e '(x)		$-$	0	+	
variations de e		↘	0	↗	

Sur [0 ; 2], la fonction e est définie, continue (car dérivable) et strictement décroissante.
$e(0) = 4096$; $e(2) = 16$ et $1000 \in [16 ; 4096]$
Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique α dans [0 ; 2]
tel que $e(\alpha) = 1000$.
Grâce à la calculette on a $0 < \alpha < 1$; $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$; $0{,}79 < \alpha < 0{,}80$;
donc une valeur approchée de α est $0{,}8$ à 10^{-1} près.

5) Dresser le tableau de variations de la fonction k telle que $k(x) = \dfrac{4x - 1}{x^2 + 2}$ sur $I = \mathbb{R}$

$$k'(x) = \frac{4\,(x^2 + 2) - (4x - 1)(2x)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{4x^2 + 8 - 8x^2 + 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-4x^2 + 2x + 8}{(x^2 + 2)^2}$$

Pour étudier le signe d'un quotient, on étudie le signe du numérateur et le signe du dénominateur.
Le numérateur est un trinôme donc on étudie son signe avec Δ.

$\Delta = 4 + 128 = 132 = 4 \times 33$ $\quad x_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{33}}{-8} = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{-4} = \dfrac{1 + \sqrt{33}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{33}}{4}$

Le dénominateur est $(1 + x)^2$ est un carré donc il est positif.
La dérivée a donc le même signe que le numérateur.

x	$-\infty$		$\mathbf{\frac{1-\sqrt{33}}{4}}$		$\mathbf{\frac{1+\sqrt{33}}{4}}$		**+** ∞
signes de k '(*x*) **a = – 4**		– signe de a	0	+	0	– signe de a	
variations de k		↘		↗		↘	