

Nom : Prénom :	DS 02	Oct. 2023 Devoir n° 04 .../...
-------------------------------	--	---

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
 Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention! Le sujet est recto-verso.

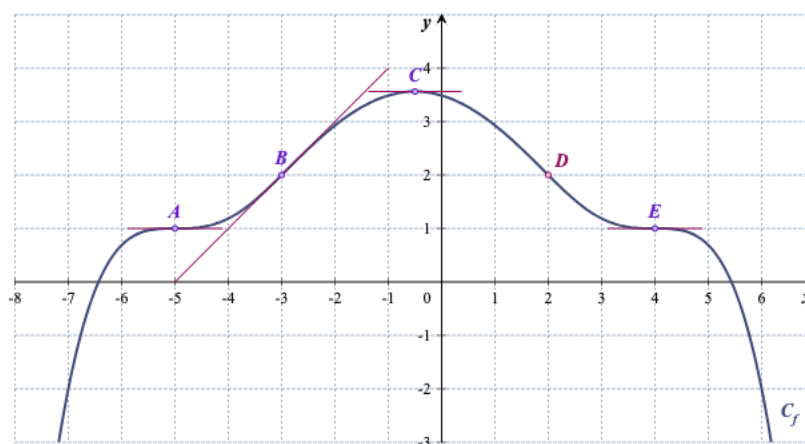
Exercice 1

6 points

6 pts

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- L'abscisse du point C est égale à $(-0,5)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(-3;2)$ passe par le point de coordonnées $(-5;0)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation $y = -x + 4$.

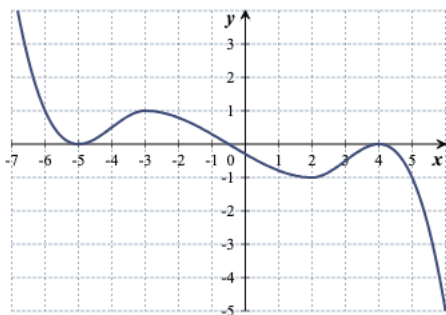


On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

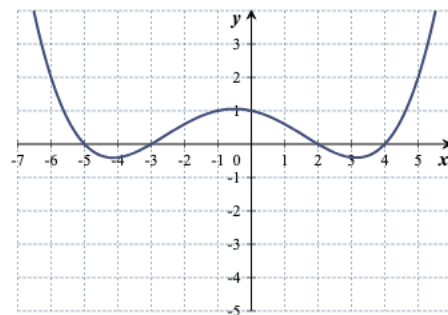
- 1** **a.** Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D.
 b. Déterminer $f'(2)$.

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées à partir d'arguments graphiques.

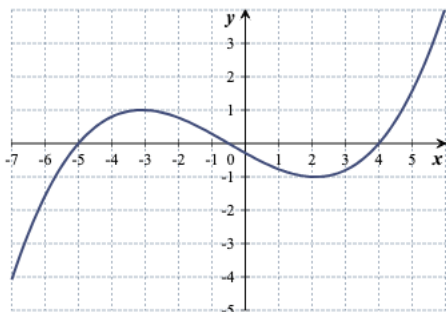
- 2** Déterminer $f'(-3)$ et $f'(4)$.
- 3** Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $\leq$, $=$ ou $\geq$ est approprié :
 $f'(-5) \dots 0$ $f'(-7) \dots f'(6)$ $f''(-1) \dots f''(3)$ $f''(2) \dots 0$
- 4** Quels sont les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?
- 5** Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .
 Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f'' .



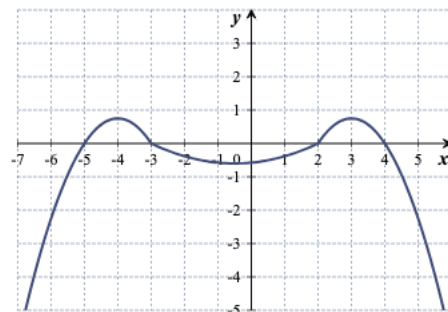
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

Exercice 2

5 points

5 pts Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et C_f sa courbe représentative.

- 1 Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout réel x , $f''(x) = 20x^2(x - 3)$.
- 2 Dresser en justifiant le tableau de signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- 3 En déduire l'existence d'un unique point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
- 4 Etudier enfin la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

4,5 points

4.5 pts

u et v sont deux fonctions définies par $u(x) = x^2 - 5x + 6$ et $v(x) = -\frac{3}{x}$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de $v \circ u$. On justifiera.
- 2 Déterminer l'expression de $v \circ u(x)$ puis celle de sa dérivée. (on admettra que le domaine de dérivabilité sera le même que son domaine de définition)

Exercice 4

9,5 points

9.5 pts (u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 2$.

- 1 Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Prouver que $u_n = 1 + 2n$ pour tout entier naturel n .
- 2 La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = v_n + u_n$.
 - a. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4 .
 - b. Démontrer, par récurrence que : pour tout entier naturel n , $v_n = 1 + n^2$.
 - c. Etudier la monotonie de (v_n) .

Exercice 5

6 points

6 pts (w_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{6n+4}{2n+1}$.

- 1 Montrer que la suite (w_n) est minorée par 3.
- 2 Etudier la monotonie de la suite (w_n) .

Exercice 6

9 points

9 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3xe^{-x} + 1$.

- 1 Calculer sa dérivée f' ainsi que sa dérivée seconde f'' .
On montrera que $f'(x) = 3e^{-x}(1-x)$ et que $f''(x) = 3e^{-x}(x-2)$.
- 2 Etudier les variations de f (on ne demande pas les limites aux bornes).
- 3 Etudier la convexité de f .
- 4 Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
- 5 En déduire que pour tout $x \in]-\infty; 2]$ on a :

$$3xe^{-x} + 1 \leq 3x + 1$$

Exercice 7 Bonus : deux questions indépendantes !

3,5 points

3.5 pts

- 1 La suite de terme général $(-1)^n$ ne prend que les valeurs 1 et -1 de façon alternée ;
donner le terme général d'une suite qui ne prend que les valeurs a et b de façon alternée.
- 2
 - a. Justifier que si a est solution de $f(x) = x$ alors a est aussi solution de $f(f(x)) = x$.
 - b. En déduire les solutions de $(x^2 + x - 1)^2 + (x^2 + x - 1) - 1 = x$