Nom : ..... Prénom :	DS 01 CASE DES MATHS	TMATHS OISELET Devoir n° 02	Sept. 2023 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 2CM — 5 points

5 pts

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse	**a.**	**d.**	**c.**	**b.**	**b.**

Exercice 2 : Simplifions ! — 4,5 points

4.5 pts

1 Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} \qquad B = \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \qquad C = \frac{\left(e^{-2x}\right)^3 \times e^{4x}}{e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} \\ &= \frac{e^2}{e^{-3}} \\ &= e^5 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} B &= \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \\ &= e^{1+x-(x+2)} \\ &= e^{-1} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} C &= \frac{\left(e^{-2x}\right)^3 \times e^{4x}}{e^{-2x}} \\ &= \frac{e^{-6x} \times e^{4x}}{e^{-2x}} \\ &= \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}} = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = e^5 \qquad B = e^{-1} \qquad C = 1}$$

2 Montrer les égalités suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a. $2e^{2x} + 6e^x - 8 = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$

$$\begin{aligned} 2(e^x - 1)(e^x + 4) &= 2\left(e^{2x} + 4e^x - e^x - 4\right) \\ &= 2\left(e^{2x} + 3e^x - 4\right) \\ &= 2e^{2x} + 6e^x - 8 \end{aligned}$$

b. $\dfrac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$

$$\begin{aligned} \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} \\ &= 1 - e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 2e^{2x} + 6e^x - 8 = 2(e^x - 1)(e^x + 4) \text{ et } \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}}$$

Exercice 3 : Equations et Inéquations — 5.5 points

5.5 pts Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1 $e^{2x-3} = e^2$

On utilise la propriété $e^a = e^b \iff a = b$.

$$\begin{aligned} e^{2x-3} = e^2 &\iff 2x-3 = 2 \\ &\iff 2x = 5 \\ &\iff x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}}$$

2 $(5x-7)e^{3x-1} = 0$

On est ici en présence d'un équation produit :

$$\begin{aligned} (5x-7)e^{3x-1} = 0 &\iff 5x-7 = 0 \text{ ou } e^{3x-1} = 0 && \text{Règle du produit nul} \\ &\iff x = \frac{7}{5} && \text{car la fonction exp est strictement positive.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{5}\right\}}$$

3 $e^{-x} - 1 \leq 0$.

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 \leq 0 &\iff e^{-x} \leq 1 \\ &\iff e^{-x} \leq e^0 \\ &\iff -x \leq 0 && \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = [0;+\infty[}$$

4 $(6-5x)e^x > 0$.

On étudie le signe de chaque facteur du produit et n fait le bilan dans un tableau de signes :

- Pour tout réel x on a $e^x > 0$.
  Ainsi pour tout réel x ; e^x est strictement positif.
- $6-5x > 0 \iff -5x > -6 \iff x < \frac{6}{5}$ en divisant par $-5 < 0$.
- On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
signe de e^x		+		+	
signe de $6-5x$		+	0	-	
signe de $f(x)$		+	0	-	

On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty;\frac{6}{5}\right[}$$

Exercice 4 — 4.5 points

4.5 pts Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

1 $f(x) = 7x^2 + 5x + 1 - 3e^x$

$$\boxed{f'(x) = 14x + 5 - 3e^x}$$

2 $g(x) = (3x+5)e^x$

g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$g = uv$, d'où $g' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 3x+5 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3e^x + (3x+5)e^x \\ &= (3+3x+5)e^x \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = (3x+8)e^x}$$

3 $h(x) = \dfrac{e^x+1}{3e^x+2}$

h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$h = \dfrac{u}{v}$ d'où $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= e^x+1 \\ v(x) &= 3e^x+2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= e^x \\ v'(x) &= 3e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x(3e^x+2) - 3e^x(e^x+1))}{(3e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^x(3e^x+2-3(e^x+1))}{(3e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^x(3e^x+2-3e^x-3)}{(3e^x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = -\frac{e^x}{(3e^x+2)^2}}$$

Exercice 5 : Variations — 0 point

Soit la fonction f définie sur $[0;5]$ par : $f(x) = (4x-1)e^{-x}$

1 Déterminer et factoriser $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 4x-1 \\ v(x) &= e^{-x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 4 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4e^{-x} + (4x-1)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(4-(4x-1)) \\ &= e^{-x}(4-4x+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (5-4x)e^{-x}}$$

2 Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$ en précisant les valeurs exactes des bornes et du maximum de f.

Tout d'abord, la fonction exponentielle étant strctement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $5-4x$.

$f'(x) = 0$	$\iff 5-4x = 0$	$f'(x) > 0$	$\iff 5-4x > 0$
	$\iff -4x = -5$		$\iff -4x > -5$
	$\iff x = \dfrac{5}{4}$		$\iff x < \dfrac{5}{4}$

On déduit le tableau de variations de f sur $[0;5]$:

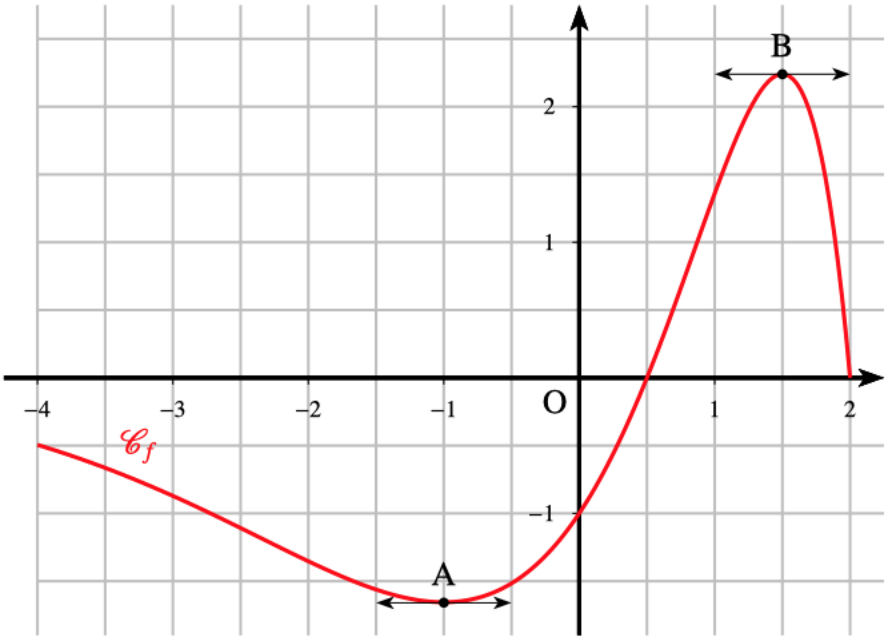
x	0		$\frac{5}{4}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$4e^{-\frac{5}{4}}$	$\searrow$	$19e^{-5}$

f présente un maximum en $\frac{5}{4}$ qui vaut $4e^{-\frac{5}{4}}$.

Exercice 6 Représentation graphique et fonction — 5 points

5 pts

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;2]$ dont on donne la courbe C_f ci-dessous.



1 Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$ et $f'(x) \leq 0$. Justifier.
Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points de C_f à tangente horizontale. On lit :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1;1,5\}}$$

Comme f est décroissante sur chacun des intervalles $[-4;-1]$ et $[1,5;2]$, on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leq 0$ est :

$$\boxed{\mathcal{S} = [-4;-1] \cup [1,5;2]}$$

2 On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = (-x^2 + 2,5x - 1)e^x$.

a. Déterminer la fonction dérivée f' .
f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= -x^2 + 2,5x - 1 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= -2x + 2,5 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x + 2,5)e^x + (-x^2 + 2,5x - 1)e^x \\ &= e^x(-2x + 2,5 - x^2 + 2,5x - 1) \\ &= e^x(-x^2 + 0,5x + 1,5) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-x^2 + 0,5x + 1,5)e^x}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur [-4 ; 2] puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur [-4 ; 2].
Tout d'abord, la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $-x^2 + 0,5x + 1,5$.
Ainsi $f'(x)$ a le signe de $-x^2 + 0,5x + 1,5$ ou de $2(-x^2 + 0,5x + 1,5) = -2x^2 + x + 3$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 + 5}{-4} \\ &= -1 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 - 5}{-4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$-2x^2 + 5x - 2$ est un trinôme du second degré qui a pour racines $\frac{1}{2}$ et 2 ; il a donc le signe de $a = -2$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-x^2 + 0.5x + 1.5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit le tableau de variations de f sur $[-4; 2]$:

x	-4		-1		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		
Variations de f	$-27e^{-4}$	↘	$-4.5e^{-1}$	↗	$0.5e^{0.5}$	↘	0

c. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en $\dfrac{1}{2}$.

T a pour équation $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(\right)x - \frac{1}{2}\Big) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

- ✏ $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$
- ✏ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0, \text{ soit } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}}$$

Exercice 7 — 3 points

3 pts On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ch : $x \mapsto \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par sh : $x \mapsto \text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1 Montrez que $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ puis que $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$.

$$\begin{aligned}\text{ch}(x)+\text{sh}(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\ &= \frac{e^x+e^{-x}+e^x+e^{-x}}{2}\\ &= \frac{2e^x}{2} = e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ch}(x)-\text{sh}(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\ &= \frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}\\ &= \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } \text{ch}(x)+\text{sh}(x) = e^x \text{ et } \text{ch}(x)-\text{sh}(x) = e^{-x}}$$

2 Montrez que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

$$\begin{aligned}\text{ch}^2(x)-\text{sh}^2(x) &= (\text{ch}(x)+\text{sh}(x))(\text{ch}(x)-\text{sh}(x))\\ &= e^x \times e^{-x}\\ &= e^0 = 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a ainsi prouvé pour tout réel } x, \text{ch}^2(x)-\text{sh}^2(x) = 1}$$

Exercice 8 Bonus — 0 point

On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{-3x}$ avec a et b deux réels.

1 Calculer $f'(x)$. f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= ax+b \\ v(x) &= e^{-3x}\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= a \\ v'(x) &= -3e^{-3x}\end{cases}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= ae^{-3x} - 3(ax+b)e^{-3x}\\ &= (-3ax+a-3b)e^{-3x}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-3ax+a-3b)e^{-3x}}$$

2 Trouver a et b sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

$$\begin{aligned}f(0)=1 &\iff (a\times 0+b)e^0 = 1\\ &\iff b = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(0)=3 &\iff (-3a\times 0+a-3b)e^0 = 0\\ &\iff a-3b = 0\\ &\iff a = 3b = 3\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (3x+1)e^{-3x}}$$

3 Etudier les variations de f.

- ✍ Dérivée : $f'(x) = (-3ax+a-3b)e^{-3x} = (-9x)e^{-2x}$
- ✍ Signe de la dérivée : la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $(-9x)$.

$$\begin{aligned}f'(x)=0 &\iff -9x = 0\\ &\iff x = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)>0 &\iff -9x > 0\\ &\iff x < 0\end{aligned}$$

✍ On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

4 Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0.
T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

✂ $f'(0) = 0$

✂ $f(0) = 1$

$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 0(x-0)+1, \text{ soit } y = 1}$

Nom : .... *Prénom :*	**DS 01** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Sept. 2023* *Devoir n° 02* .../...

Feuille de réponses de l'exercice 1 :

✄ ✄

A rendre au bout de 20 minutes.

Nom , prénom :

Groupe :