

CHAPITRE 2 COMPLEMENTS SUR LA DERIVATION

I. Fonctions composées :

1) Définition :

**La fonction composée de v par u , notée $v \circ u$, est définie pour tout x d'un intervalle I par ,
 $v \circ u (x) = v (u(x))$.**

2) Exemples :

On donne $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer l'expression de $v \circ u(x)$.

$$v \circ u(x) = v (x^2 + 4) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

2) Quel est l'ensemble de définition de $v \circ u$?

$$v \circ u (x) = v (u(x)).$$

Il faut donc que $u(x)$ soit positif pour pouvoir en calculer la racine carrée.

$$u(x) = x^2 + 4 \quad u(x) \text{ est strictement positif car } x^2 \geq 0 \text{ donc } x^2 + 4 \geq 4 > 0.$$

Donc $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer l'expression de $u \circ v(x)$.

$$u \circ v(x) = u (\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 4 = x + 4$$

4) Quel est l'ensemble de définition de $u \circ v$?

$$u \circ v (x) = u (v(x)).$$

Il faut donc que x soit positif pour pouvoir en calculer la racine carrée.

Donc $u \circ v$ est définie sur $[0 ; +\infty [$

3) Dérivation d'une fonction composée :

Si u est une fonction dérivable en a et v une fonction dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et $(v \circ u)' (a) = u'(a) \times v'(u(a))$.

Exemple : On donne $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer $(v \circ u)'(x)$

$$(v \circ u)' (x) = u'(x) \times v' (u(x)) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

2) Déterminer $(u \circ v)'(x)$.

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u' (v(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} = 1$$

ou $u \circ v(x) = x + 4$ donc $(u \circ v)'(x) = 1$

Conséquences :

$$(e^u)' = u'(x) \times e^u$$

$$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1} \quad \text{En particulier : } (u^2)' = 2 u' u \text{ et } (u^3)' = 3 u' u^2$$

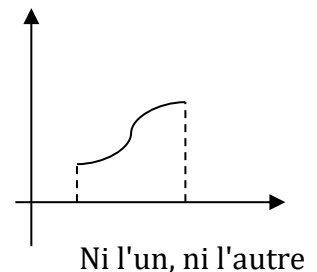
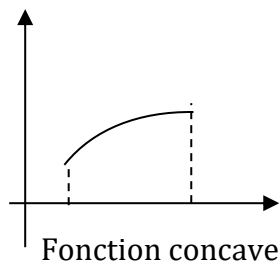
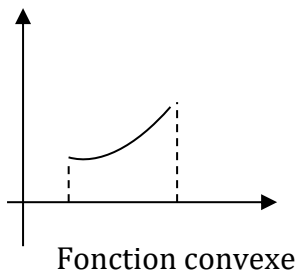
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

II. CONVEXITE :

1) Introduction :

La notion de convexité va nous permettre de mieux connaître les caractéristiques d'une courbe. En effet, si une fonction est croissante sur un intervalle $[a ; b]$, on peut avoir plusieurs types de courbes.

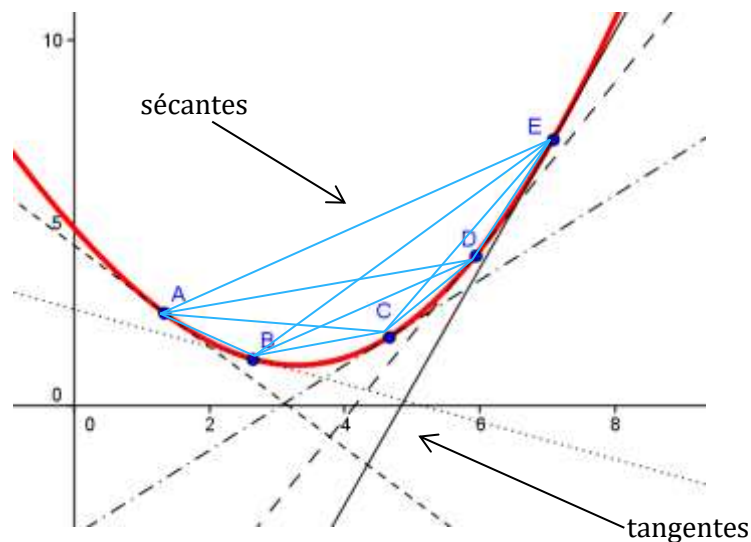


2) Définitions :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

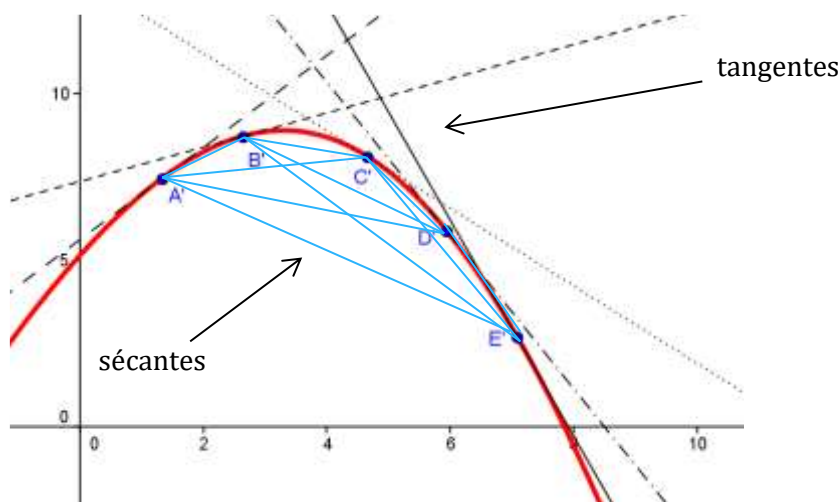
On dira que f est une fonction concave sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située en dessous de chacune de ses sécantes (droites passant par deux points quelconques de la courbe)

On dira que f est une fonction convexe sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située au dessus de chacune de ses tangentes.



On dira que f est une fonction concave sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située au dessus de chacune de ses sécantes (droites passant par deux points quelconques de la courbe)

On dira que f est une fonction convexe sur I si la totalité de la courbe représentative de f est située en dessous de chacune de ses tangentes.



3) Convexité et fonction dérivée seconde :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f'$ est une fonction croissante sur I .

f est concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f'$ est une fonction décroissante sur I .

4) Exemples :

a) Etudier la convexité de la fonction carré : $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x ; f''(x) = 2 \quad f''(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

La fonction carré est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la convexité de la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; f''(x) = -1 \times -\frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

Signe de $f''(x)$ sur $]0 ; +\infty[$: $x > 0$ et $\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction racine carrée est donc concave sur $]0 ; +\infty[$.

c) Etudier la convexité de la fonction exponentielle : $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x ; f''(x) = e^x \quad \text{et} \quad e^x > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

La fonction exponentielle est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

d) Etudier la convexité de la fonction cube : $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 ; f''(x) = 6x \quad f''(x) \geq 0 \text{ sur } [0 ; +\infty[\quad \text{et} \quad f''(x) \leq 0 \text{ sur }]-\infty ; 0] .$$

La fonction cube est donc convexe sur $[0 ; +\infty[$ et concave sur $] -\infty ; 0]$.

III. EXPLOITATION DE LA CONVEXITE :

1) Point d'inflexion :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Dire que $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f signifie que , en A , la courbe traverse sa tangente.

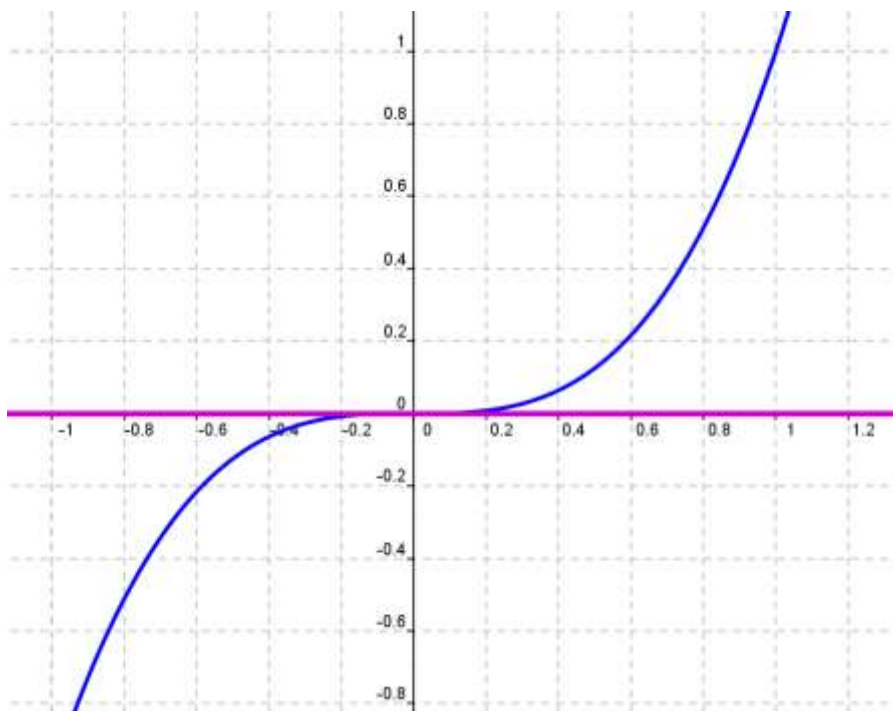
**Conséquences : En a , la courbe passe de convexe à concave ou vice-versa.
En a , la dérivée seconde s'annule et change de signe.**

Exemple : La fonction cube admet-elle un point d'inflexion ?

La fonction cube admet en $(0;0)$ un point d'inflexion.

En effet $f''(x) = 6x$; $f''(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ sur $] -\infty ; 0]$.

La tangente en 0 est la droite d'équation $y = 0$ donc l'axe des abscisses.



2) Inégalités de convexité :

Si f est une fonction convexe sur un intervalle I , si a et b sont deux réels de I ,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Si f est une fonction concave sur un intervalle I , si a et b sont deux réels de I ,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Applications :

1) Etablir l'inégalité de convexité

a) pour la fonction exponentielle :

$f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$ et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Donc si a et b sont deux réels, $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

b) pour la fonction cube :

$f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$ $f''(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ sur $] -\infty ; 0]$.

La fonction cube est donc convexe sur $[0 ; +\infty[$ et concave sur $] -\infty ; 0]$.

Si a et b sont des nombres réels positifs, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3 + b^3}{2}$

Si a et b sont des nombres réels négatifs, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geq \frac{a^3 + b^3}{2}$

2) démontrer que $e^x \geq 1 + x$

Equation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0 :

$$y = e^0 (x - 0) + e^0 \text{ donc } y = x + 1$$

$f''(x) = e^x$ et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe est donc au-dessus de ces tangentes sur $\mathbb{R}$.

donc $e^x \geq 1 + x$.