TSpé Fiche de révisions : Fonction exponentielle

Exercice 1 : Simplifier les écritures suivantes :

$A = (e^x)^3 \times e^{-2x+4} \times e^{7x+1}$ $B = \dfrac{e^{-4x+8} \times (e^{-x})^2}{e^{3x^2-x+4}}$ $C = (e^{2x-1})^4 \times e^{-3x+4} \times e^{7x+2}$ $D = \dfrac{e^{-7x+8} \times (e^{-3x+4})^2}{e^{3x^2-x+4} \times e^x}$

Exercice 2 : Résoudre dans R les équations ou inéquations suivantes :

1) $e^{3-4x} = 1$ 2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ 3) $e^{x-7} = -1$ 4) $e^{2x^2+3} = e^{-1}$

5) $e^{x^2} < -3$ 6) $(e^x)^3 \geq e^{x+6}$ 7) $e^x > \dfrac{1}{e^x}$ 8) $(e^x + 4)(e^x - 1) > 0$

Exercice 3 :
On définit les fonction ch et sh, respectivement sinus et cosinus hyperbolique, sur R par

$ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Démontrer que $[ch(x)]^2 - [sh(x)]^2 = 1$.

Exercice 4 :
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur les réels

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ 2) $f(x) = 5e^x - 3e^{2x}$ 3) $f(x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x+3}$

4) $f(x) = 7x - 8 + 2e^{-x}$ 5) $f(x) = e^{-3x^2+7}$ 6) $f(x) = (2e^x + 3)(e^x - 5)$

7) $f(x) = \dfrac{e^x-5}{2e^x+1}$ 8) $f(x) = (7e^{-x} + 6)^2$

Exercice 5 :
f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (-3x + 4)e^x$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f sur les réels
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d abscisse 0.

Exercice 6 :

g est une fonction définie sur les réels par $g(x) = \dfrac{5e^x}{e^x+4}$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de g sur les réels
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_g au point d abscisse 1.
3. Expliquer pourquoi l'équation $g(x) = 3$ admet une unique solution α sur les réels.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

Correction Fiche de révisions :Fonction exponentielle

Exercice 1 : Simplifier les écritures suivantes :

$A= (e^x)^3 \times e^{-2x+4} \times e^{7x+1} = e^{3x} \times e^{5x+5} = e^{8x+5}$

$B = \dfrac{e^{-4x+8} \times (e^{-x})^2}{e^{3x^2-x+4}} = \dfrac{e^{-4x+8} \times e^{-2x}}{e^{3x^2-x+4}} = \dfrac{e^{-6x+8}}{e^{3x^2-x+4}} = e^{-3x^2-5x+4}$

$C= (e^{2x-1})^4 \times e^{-3x+4} \times e^{7x+2} = e^{8x-4} \times e^{4x+6} = e^{12x+2}$

$D = \dfrac{e^{-7x+8} \times (e^{-3x+4})^2}{e^{3x^2-x+4} \times e^x} = \dfrac{e^{-7x+8} \times e^{-6x+8}}{e^{3x^2+4}} = \dfrac{e^{-13x+16}}{e^{3x^2+4}} = e^{-3x^2-13x+12}$

Exercice 2 : Résoudre dans R les équations ou inéquations suivantes :

1) $e^{3-4x} = 1$

$e^{3-4x} = e^0$

$3 - 4x = 0$

$x = \dfrac{3}{4}$

$S = \{ \dfrac{3}{4} \}$

2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

$2x^2 + 3 = 7x$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$\Delta = 49 - 24 = 25$

$x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+5}{4} = 3$

$S = \{ \dfrac{1}{2} ; 3 \}$

3) $e^{x-7} = -1$

$S = \varnothing$

4) $e^{2x^2+3} = e^{-1}$

$2x^2 + 3 = -1$

$2x^2 = -4$

$x^2 = -2$

$S = \varnothing$

5) $e^{x^2} < -3$

$S = \varnothing$

6) $(e^x)^3 \geq e^{x+6}$

$e^{3x} \geq e^{x+6}$

$3x \geq x + 6$

$2x \geq 6$

$x \geq 3$

$S = [3 ; +\infty [$

7) $e^x > \dfrac{1}{e^x}$

$e^x > e^{-x}$

$x > -x$

$2x > 0$

$x > 0$

$S =] 0 ; +\infty[$

8) $(e^x + 4)(e^x - 1) > 0$

$e^x + 4 \geq 0$ $e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq -4$ $e^x \geq 1$

$S = \mathbb{R}$ $e^x \geq e^0$

$x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signes de $e^x + 4$		+		+	
signes de $e^x - 1$		$-$	0	+	
signes de $(e^x + 4)(e^x - 1)$		$-$	0	+	

$S =] 0 ; +\infty[$

Exercice 3 :

On définit les fonction ch et sh, respectivement sinus et cosinus hyperbolique, sur R par

$\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Démontrer que $[\text{ch}(x)]^2 - [\text{sh}(x)]^2 = 1$.

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Exercice 4 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur les réels

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$u(x) = x^2 - 2x \qquad u'(x) = 2x - 2$

$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x$

$= (2x - 2 + x^2 - 2x)e^x$

$= (x^2 - 2)e^x$

2) $f(x) = 5e^x - 3e^{2x}$

$f'(x) = 5e^x - 3 \times 2e^{2x}$

$= 5e^x - 6e^{2x}$

$= e^x(5 - 6e^x)$

3) $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 3}$

$u(x) = 2e^x - 3 \qquad u'(x) = 2e^x$

$v(x) = e^x + 3 \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = \dfrac{2e^x(e^x + 3) - (2e^x - 3)e^x}{(e^x + 3)^2}$

$= \dfrac{e^x(2e^x + 6 - 2e^x + 3)}{(e^x + 3)^2}$

$= \dfrac{9e^x}{(e^x + 3)^2}$

4) $f(x) = 7x - 8 + 2e^{-x}$

$f'(x) = 7 - 2e^{-x}$

5) $f(x) = e^{-3x^2 + 7}$

$f'(x) = -6x\, e^{-3x^2 + 7}$

6) $f(x) = (2e^x + 3)(e^x - 5)$

$u(x) = 2e^x + 3 \qquad u'(x) = 2e^x$

$v(x) = e^x - 5 \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2e^x(e^x - 5) + (2e^x + 3)e^x$

$= (2e^x - 10 + 2e^x + 3)e^x$

$= (4e^x - 7)e^x$

7) $f(x) = \dfrac{e^x - 5}{2e^x + 1}$

$u(x) = e^x - 5 \qquad u'(x) = e^x$

$v(x) = 2e^x + 1 \qquad v'(x) = 2e^x$

$f'(x) = \dfrac{e^x(2e^x + 1) - (e^x - 5)(2e^x)}{(2e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{e^x(2e^x + 1 - 2e^x + 10)}{(2e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{11e^x}{(2e^x + 1)^2}$

8) $f(x) = (7e^{-x} + 6)^2$

$u(x) = 7e^{-x} + 6 \qquad u'(x) = -7e^{-x}$

$f'(x) = 2 \times (-7e^{-x}) \times (7e^{-x} + 6)$

$f'(x) = -14e^{-x} \times (7e^{-x} + 6)$

Exercice 5 :

f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (-3x + 4)\,e^x$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f sur les réels

   $u(x) = -3x + 4$ $\qquad u'(x) = -3x$

   $v(x) = e^x$ $\qquad v'(x) = e^x$

   $f'(x) = -3x\,e^x + (-3x + 4)e^x = (-3x - 3x + 4)e^x = (-6x + 4)e^x$

   Signe de $f'(x)$: e^x est strictement positif sur ℝ donc $f'(x)$ est du signe de $-6x + 4$.

   $$-6x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -6x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

   Tableau de variation de f : $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(-3\times\frac{2}{3} + 4\right) \quad = 2$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signes de $f'(x)$		+	0	−	
variations de f		↗		↘	

2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

   $y = f'(0)(x + 0) + f(0)$

   $y = 4x + 4$

Exercice 6 :

g est une fonction définie sur les réels par $g(x) = \dfrac{5e^x}{e^x + 4}$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

4. Etudier les variations de g sur les réels
5. Déterminer l'équation de la tangente à C_g au point d abscisse 1.
6. Expliquer pourquoi l'équation $g(x) = 3$ admet une unique solution α sur les réels. Donner une valeur approchée de α au centième.