Calcul des primitives d'une fonction

69 *Capacité 3, p. 299*

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$.

2. Déterminer une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{2x}$.

Pour les exercices 70 à 74, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

70 $f(x) = 5x^3 - 3x + 7$ et $g(x) = 2x^4 - \dfrac{1}{2}x^3$

71 $f(x) = x^5 - x$ et $g(x) = 4x^4 - 7x + \sqrt{2}$

72 $f(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$ et $g(x) = 10 - 3\mathrm{e}^x + x$

73 $f(x) = (x-1)(x+2)$ et $g(x) = (2x+1)^2$

74 $f(x) = \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{1}{6}$ et $g(x) = 12{,}4x^9 - 7x^6 + 15x^4$

Pour les exercices 75 à 80, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par leurs expressions.

75 $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$

76 $f(x) = x + x^{-3}$ et $g(x) = x - \dfrac{1}{2x}$

77 $f(x) = \dfrac{7}{x^3}$ et $g(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$

78 $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}$

79 $f(x) = \dfrac{3x^2 - 11}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}} - x + 6$

80 $f(x) = \dfrac{4 - x\sqrt{x}}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1 + x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

81 *Capacité 4, p. 299*

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 3x^2(x^3+1)^2$ **2.** $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

3. $h(x) = \mathrm{e}^{-x+3}$ **4.** $i(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+7}}$

Pour les exercices 82 à 91, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

82 $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+4}$ et $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$

83 $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-3}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4}$

84 $f(x) = 5\mathrm{e}^{4-x}$ et $g(x) = \dfrac{4x^3}{x^4 + 5}$

85 $f(x) = 4x(3x^2 - 8)^2$ et $g(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}}$

86 $f(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 4)^3$ et $g(x) = (2x-1)^4$

87 $f(x) = \sin(3x) - \cos(2x)$ et $g(x) = \sin\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

88 $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)\cos^2(x)$

EXERCICES Pour s'entraîner

89 $f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}$ et $g(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3$

90 $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{(x^2 - 2x + 4)^2}$

91 $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $g(x) = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x + 1)}$

Pour les exercices 92 à 100, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

92 $f(x) = \dfrac{2}{x}(\ln(x) + 2)^2$ sur $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$

93 $f(x) = \dfrac{2}{(3x-1)^2} + \dfrac{1}{3x-1}$ sur $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$

94 $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$

95 $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $\mathrm{I} =]1 ; +\infty[$

Piste : *Reconnaître la forme* $\dfrac{u'}{u}$.

96 $f(x) = \dfrac{-3 - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 3x)^2}$ sur $\mathrm{I} = [0 ; +\infty[$

97 $f(x) = \dfrac{-7}{x(\ln(x) + 3)}$ sur $\mathrm{I} =]\mathrm{e}^{-3} ; +\infty[$

98 $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$

99 $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ sur $\mathrm{I} =]0 ; \pi[$

100 $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$

101 **1.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle **(E)** : $y' = x - \sin(x)$.

2. Déterminer la solution f de **(E)** telle que $f(0) = 2$.

102 **1.** Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $]2 ; +\infty[$: $\dfrac{5x}{(x-2)(2x+1)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{2x+1}$.

2. En déduire les primitives de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{5x}{(x-2)(2x+1)}$ sur $]2 ; +\infty[$.

103 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $]-1 ; +\infty[$: $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^2} + \dfrac{b}{x+1}$.

2. En déduire les primitives de f sur $]-1 ; +\infty[$.

104 Une question ouverte

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive de f ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Déterminer une primitive de la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(x) = f(-x) + f(2x+1) + \frac{f(x)}{F(x)}.$$

Corrections

n°69 : 1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$.

$F(x) = \frac{2}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

$= \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

2) $g(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x} = 3 \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$

$G(x) = 3 \times \frac{-1}{x} - \frac{1}{2}\ln x + C \quad x > 0$

n°70 : $f(x) = 5x^3 - 3x + 7$

$F(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + C$

$g(x) = 2x^4 - \frac{1}{2}x^3$

$G(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + C$

n°71 : $f(x) = x^5 - x$

$F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^2 + C$

$g(x) = 4x^4 - 7x + \sqrt{2}$

$G(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + \sqrt{2}x + C$.

n°72 : $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$

$F(x) = 2\sin x + 3\cos x + C$

$g(x) = 10 - 3e^x + x$

$G(x) = 10x - 3e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

n°73 : $f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

$g(x) = (2x+1)^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (2x+1)^2$

$u'(x) \times (u(x))^2$

$G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

$G(x) = \frac{1}{6}(2x+1)^3 + C$

n°74 : $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \times x^5 + \frac{1}{6}$

$f(x) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x + C$

$= \frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{6}x + C$

$g(x) = 12{,}4x^9 - 7x^6 + 15x^4$

$G(x) = 12{,}4 \times \frac{1}{10}x^{10} - 7 \times \frac{1}{7}x^7 + 15 \times \frac{1}{5}x^5 + C$

$= 1{,}24x^{10} - x^7 + 3x^5 + C$

n°75 : $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x}$

$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + \ln x + C$

$g(x) = x^2 + \frac{4}{x^2} = x^2 + 4 \times \frac{1}{x^2}$

$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4 \times \frac{-1}{x} + C$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x} + C$.

n°76 : $f(x) = x + x^{-3}$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{-2}x^{-2} + C$

$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} + C$

$g(x) = x - \frac{1}{2x} = x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x + C$.

n°77 : $f(x) = \frac{7}{x^3} = 7 \times \frac{1}{x^3}$

$F(x) = 7 \times \frac{-1}{2x^2} + C$

$= \frac{-7}{2x^2} + C$

$g(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 4 \times \frac{1}{x} - 3 \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

$G(x) = 4\ln x - 3 \times \frac{-1}{x} + \frac{-1}{3x^3} + C$

$= 4\ln x + \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$.

n°78 : $f(x) = \frac{x+5}{x^2} = \frac{1}{x} + 5 \times \frac{1}{x^2}$

$f(x) = \ln x - \frac{5}{x} + C$

$g(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x} = x - 1 + \frac{2}{x}$.

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln x + C$.

n°79 : $f(x) = \frac{3x^2 - 11}{x^2} = 3 - \frac{11}{x^2}$

$f(x) = 3x + \frac{11}{x} + C$

$g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} - x + 6$

$G(x) = 5 \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 6x + C$

$= 10\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 6x + C$.

n°80 : $f(x) = \dfrac{4 - x\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$F(x) = \dfrac{-4}{x} - 1 \times 2\sqrt{x} + C$

$= \dfrac{-4}{x} - 2\sqrt{x} + C$

$g(x) = \dfrac{1 + x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^2$

$G(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}x^3 + C$.

n°81 : 1) $f(x) = 3x^2(x^3+1)^2$

$u(x) = x^3 + 1$

$u'(x) = 3x^2$

$f(x) = u'(x) \times (u(x))^2$

$F(x) = \dfrac{1}{3}(x^3+1)^3 + C$

2) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$u(x) = x^2 + 1 \quad u'(x) = 2x$

$g(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$G(x) = \dfrac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + C \quad x^2+1 > 0$ sur $\mathbb{R}$

$G(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

3) $h(x) = e^{-x+3}$

$u(x) = -x+3 \quad u'(x) = -1$

$h(x) = -u'(x)e^{u(x)}$

$H(x) = -e^{-x+3} + C$

4) $i(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+7}}$

$u(x) = 2x^2 + 7 \quad u'(x) = 4x$

$i(x) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

$I(x) = \dfrac{3}{4} \times 2\sqrt{2x^2+7} + C$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{2x^2+7} + C$.

n°82 : $f(x) = 3e^{3x+4}$

$u(x) = 3x+4 \quad u'(x) = 3$

$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$

$F(x) = e^{3x+4}$

$g(x) = xe^{x^2-3}$

$u(x) = x^2 - 3 \quad u'(x) = 2x$

$g(x) = \dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$

$G(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2-3}$.

n°83 : $f(x) = x^2e^{-3}$ $\quad e^{-3} = c^{te}$

$F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \times e^{-3} + C$

$g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+4} \quad e^x + 4 > 0$

$u(x) = e^x + 4 \quad u'(x) = e^x \quad g(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$G(x) = \ln(e^x+4) + C$

n°84 $f(x) = 5e^{4-x}$

$u(x) = 4 - x \quad u'(x) = -1$

$f(x) = -5u'(x)e^{u(x)}$

$F(x) = -5e^{4-x} + C$

$g(x) = \dfrac{4x^3}{x^4+5}$

$u(x) = x^4 + 5 \quad u'(x) = 4x^3$

$g(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \quad x^4 + 5 > 0$

$G(x) = \ln(x^4+5) + C$.

n°85 : $f(x) = 4x(3x^2-8)^2$

$u(x) = 3x^2 - 8 \quad u'(x) = 6x$

$f(x) = \dfrac{4}{6}u'(x)(u(x))^2$

$F(x) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3}(3x^2-8)^3 + C$

$= \dfrac{2}{9}(3x^2-8)^3 + C$

$g(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}}$

$u(x) = x^2 + 3 \quad u'(x) = 2x$.

En l'état on ne peut pas déterminer une primitive de g. Il aurait fallu avoir $g(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}}$ par exemple.

n°86 : $f(x) = e^x (e^x+4)^3$

$u(x) = e^x+4 \quad u'(x) = e^x$

$f(x) = u'(x) \times (u(x))^3$

$F(x) = \frac{1}{4}(e^x+4)^4 + C$

$g(x) = (2x-1)^4$

$u(x) = 2x-1 \quad u'(x) = 2$

$g(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times (u(x))^4$

$G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}(2x-1)^5 + C$

$= \frac{1}{10}(2x-1)^5 + C$.

n°87 : $f(x) = \sin(3x) - \cos(2x)$

$= \frac{1}{3} \times 3\sin(3x) - \frac{1}{2} \times 2\cos(2x)$

$u'(x)\sin u(x) \qquad v'(x)\cos v(x)$

$F(x) = \frac{-1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + C$.

$g(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$u(x) = 5x + \frac{\pi}{4} \quad u'(x) = 5$

$g(x) = \frac{1}{5} \times u'(x)\sin u(x)$

$G(x) = \frac{-1}{5}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) + C$

n°88 $f(x) = \sin x \times \cos x$

$u(x) = \sin x \quad u'(x) = \cos x$

$f(x) = u'(x) \times u(x)$.

$F(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C$

$g(x) = \sin x \times (\cos x)^2$

$u(x) = \cos x \quad u'(x) = -\sin x$

$g(x) = -u'(x) \times (u(x))^2$

$G(x) = -\frac{1}{3}(\cos x)^3 + C$.

n°89 : $f(x) = \cos x\, e^{\sin x}$

$u(x) = \sin x \quad u'(x) = \cos x$

$f(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$

$F(x) = e^{\sin x} + C$

$g(x) = \sin x (1-\cos x)^3$

$u(x) = 1-\cos x \quad u'(x) = +\sin x$

$g(x) = u'(x) \times (u(x))^3$

$G(x) = \frac{1}{4}(1-\cos x)^4 + C$

n°90 $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$

$u(x) = x^2+x+1 \quad u'(x) = 2x+1$

$f(x) = 2\,\frac{u'(x)}{u(x)}$

$F(x) = 2\ln(|x^2+x+1|) + C$

$\Delta = 1-4 = -3 \quad \Delta < 0$ donc

$x^2+x+1 > 0$ sur $\mathbb{R}$

$F(x) = 2\ln(x^2+x+1) + C$

$g(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+4)^2}$

$u(x) = x^2-2x+4 \quad u'(x) = 2x-2$

$g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$

$G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2-2x+4} + C$

$G(x) = \frac{-1}{2(x^2-2x+4)} + C$.

n°90 : $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$u(x) = -x \quad u'(x) = -1$

$f(x) = -u'(x)e^{u(x)}$

$f(x) = -e^{-x} + C$

$f(x) = -\frac{1}{e^x} + C$

$g(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{3e^x}{e^x+1}$

$u(x) = e^x+1 \quad u'(x) = e^x$

$g(x) = 3 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

$G(x) = 3 \times \ln(|e^x+1|) + C$

$= 3\ln(e^x+1) + C$ car $e^x+1 > 0$ sur $\mathbb{R}$

n°92 : $f(x) = \frac{2}{x}\left(\ln x + 2\right)^2$ $u(x) = \ln x + 2$ $u'(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = 2u'(x)\left(u(x)\right)^2$

$F(x) = 2 \times \frac{1}{3}\left(\ln x + 2\right)^3 + C = \frac{2}{3}\left(\ln x + 2\right)^3 + C$

n°93 : $f(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1}$ $u(x) = 3x - 1$ $u'(x) = 3$

$f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2} + \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

$F(x) = \frac{2}{3} \times \frac{-1}{3x-1} + \frac{1}{3}\ln\left(|3x-1|\right) + C$

sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ $x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow 3x - 1 > 0$

$F(x) = \frac{-2}{3(3x-1)} + \frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$.

n°94 : $f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x) \times u(x)$ $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

n°95 : $f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $F(x) = \ln\left(|\ln x|\right) + C$

sur $]1; +\infty[$ $\ln x > 0$

$F(x) = \ln(\ln x) + C$.

n°96 : $f(x) = \frac{-3 - e^x}{(e^x + 3x)^2}$ $u(x) = e^x + 3x$ $u'(x) = e^x + 3$ $f(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$

$F(x) = \frac{1}{e^x + 3x} + C$

n°97 : $f(x) = \frac{-7}{x(\ln x + 3)} = -7 \times \frac{\frac{1}{x}}{\ln x + 3}$ $u(x) = \ln x + 3$ $u'(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = -7\frac{u'(x)}{u(x)}$

$F(x) = -7\ln\left(|\ln x + 3|\right) + C$

Sur $]e^{-3}; +\infty[$ $x > e^{-3} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-3} \Leftrightarrow \ln x > -3 \Leftrightarrow \ln x + 3 > 0$

$F(x) = -7\ln(\ln x + 3) + C$

n°98 : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$ $F(x) = -\ln\left(|\cos x|\right) + C$

Sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ $\cos x > 0$ donc $F(x) = -\ln(\cos x) + C$.

n°99 : $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ $u(x) = \sin x$ $u'(x) = \cos x$ $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

$F(x) = 2\sqrt{\sin x} + C$

n°100 $f(x) = \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ $u(x) = \frac{1}{x}$ $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$ $f(x) = -2u'(x)e^{u(x)}$

$F(x) = -2e^{\frac{1}{x}} + C$.

n°101 : 1) Les solutions de (E) sont les fonctions f telles que $f'(x) = x - \sin x$ donc les primitives de $x - \sin x$.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x + C$.

2) $f(0) = 2 \iff 0 + \cos 0 + C = 2 \iff C = 2 - 1 = 1$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x + 1$ est la solution de (E) telle que $f(0) = 2$

n°102 : 1) $\frac{5x}{(x-2)(2x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{2x-1}$

$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{2x-1} = \frac{a(2x-1) + b(x-2)}{(x-2)(2x-1)} = \frac{x(2a+b) - a - 2b}{(x-2)(2x-1)}$.

Par identification des polynômes, on doit avoir :

$2a + b = 5$ et $-a - 2b = 0$

Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} -a - 2b = 0 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ -4b + b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ -3b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{10}{3} \\ b = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Donc $\frac{5x}{(x-2)(2x+1)} = \frac{10}{3(x-2)} - \frac{5}{3(2x-1)}$

2) $f(x) = \frac{10}{3} \times \frac{1}{x-2} - \frac{5}{3} \times \frac{1}{2x-1}$.

$= \frac{10}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} \frac{v'(x)}{v(x)}$

$F(x) = \frac{10}{3} \ln(|x-2|) - \frac{5}{6} \ln(|2x-1|) + C$.

Sur $]2; +\infty[$ $\quad x > 2 \iff x - 2 > 0$

$2x > 4 \iff 2x - 1 > 3 > 0$.

donc $F(x) = \frac{10}{3} \ln(x-2) - \frac{5}{6} \ln(2x-1) + C$

n°103 : 1) $f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} = \frac{a + b(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{bx + a + b}{(x+1)^2}$

Par identification, il faut que $b = 1$ et $a + b = 3 \iff a = 3 - 1 = 2$

Donc $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$.

2) $f(x) = 2 \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2} + \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x) = 2x \frac{-1}{x+1} + \ln(|x+1|) + C$

Sur $]-1; +\infty[$ $\quad x > -1 \iff x + 1 > 0$ donc $F(x) = \frac{-2}{x+1} + \ln(x+1) + C$

n°104 : $z(x) = f(-x) + f(2x+1) + \dfrac{f(x)}{F(x)}$

$u(x) = -x$ $\qquad v(x) = 2x+1$

$u'(x) = -1$ $\qquad v'(x) = 2$.

$$z(x) = -u'(x) f(u(x)) + \frac{1}{2} v'(x) f(v(x)) + \frac{F'(x)}{F(x)}.$$

$$z(x) = -u'(x) F'(u(x)) + \frac{1}{2} v'(x) F'(v(x)) + \frac{F'(x)}{F(x)}.$$

$$Z(x) = -F(u(x)) + \frac{1}{2} F(v(x)) + \ln(|F(x)|) + C.$$

$$Z(x) = -F(-x) + \frac{1}{2} F(2x+1) + \ln(|F(x)|) + C.$$

Exemple : si $f(x) = e^x + x$

$F(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2$ $\quad f(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$z(x) = f(-x) + f(2x+1) + \frac{f(x)}{F(x)}$$

$$z(x) = e^{-x} - x + e^{2x+1} + 2x + 1 + \frac{e^x + x}{e^x + \frac{1}{2}x^2} \quad \begin{matrix} u'(x) \\ u(x) \end{matrix}$$

$$Z(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2x+1} + x^2 + x + \ln\left(\left|e^x + \frac{1}{2}x^2\right|\right) + C.$$

Calculons : $-F(-x) + \frac{1}{2} F(2x+1) + \ln(|F(x)|)$

$$= -e^{-x} - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{2x+1} + \frac{1}{2}(2x+1)^2\right) + \ln\left(\left|e^x + \frac{1}{2}x^2\right|\right)$$

$$= -e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2x+1} + \frac{1}{4}(4x^2+4x+1) + \ln\left(\left|e^x + \frac{1}{2}x^2\right|\right).$$

$$= -e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2x+1} + x^2 + x + \frac{1}{4} + \ln\left(\left|e^x + \frac{1}{2}x^2\right|\right).$$

$$= Z(x) + \frac{1}{4}.$$ $\quad \frac{1}{4}$ joue le rôle de C.