

1)  $f(x) = \frac{x + 2\sin x}{x}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$  pour tout réel  $x$

$-2 \leq 2\sin x \leq 2$

$x-2 \leq x+2\sin x \leq x+2$

Si  $x > 0$   $\frac{x-2}{x} \leq \frac{x+2\sin x}{x} \leq \frac{x+2}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$

donc grâce au théorème des gendarmes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$

Si  $x < 0$   $\frac{x+2}{x} \leq \frac{x+2\sin x}{x} \leq \frac{x-2}{x}.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$

donc d'après le théorème des gendarmes  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$

2)  $g(x) = (2 + \cos x)x^3$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

Si  $x > 0$ ,  $x^3 > 0$  et on a  $x^3 \leq (2 + \cos x)x^3 \leq 3x^3.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  donc par comparaison  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$

Si  $x < 0$ ,  $x^3 < 0$  et on a  $3x^3 \leq (2 + \cos x)x^3 \leq x^3.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  donc par comparaison  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$

3)  $h(x) = \frac{x}{\sin x + x}$

$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$-1+x \leq \sin x + x \leq 1+x$

$-1+x > 0 \Leftrightarrow x > 1$  et  $\frac{1}{-1+x} \leq \frac{1}{\sin x + x} \leq \frac{1}{1+x}$

$\frac{x}{-1+x} \leq \frac{x}{\sin x + x} \leq \frac{x}{1+x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$  donc d'après le théorème

des gendarmes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1.$

$1+x < 0 \Leftrightarrow x < -1$  et  $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sin x + x} \leq \frac{1}{-1+x}$  donc  $\frac{x}{1+x} \leq h(x) \leq \frac{x}{-1+x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-1+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$  (idem).

4).  $k(x) = x^3 + 3 \sin x$ .

(2)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-3 \leq 3 \sin x \leq 3$$

$$x^3 - 3 \leq x^3 + 3 \sin x \leq x^3 + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$$

(théorème des gendarmes)

n°78p. 183

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \text{ sur } ]0; +\infty[.$$

1) si  $x > 0$  alors  $\frac{1}{x} > 0$  et  $1 + \frac{1}{x} > 1$

Or si  $x \geq 1$ ,  $x^2 \geq x \geq 1$  donc  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 1 + \frac{1}{x} \geq 1$

2).  $1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \leq \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}$$

la fonction racine carrée est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x} \text{ car } 1 + \frac{1}{x} > 1 > 0.$$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

donc d'après le théorème des gendarmes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

n°26 page 177.

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$   $a=1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 2x^2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \end{array}$$

$$2) g(x) = \frac{5x+2}{x+4} \quad a = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} 5x+2 = -18.$$

Signe de  $x+4$ :

$$x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$$

$$x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -4.$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} x+4 = 0^-$$

$$\text{donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} g(x) = +\infty.$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} x+4 = 0^+$$

$$\text{donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} g(x) = -\infty.$$

$$3) h(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad a = -1.$$

Signe de  $x^2-1$ :

$$x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1$$

$$x^2-1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in ]-1; 1[.$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x^2-1 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x^2-1 = 0^-$$

par passage à l'inverse

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} h(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} h(x) = -\infty.$$

$$4) k(x) = \frac{2}{\sqrt{x}-2} \quad a = 4.$$

Signe de  $\sqrt{x}-2$

$$\sqrt{x}-2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$$

$$\sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4.$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \sqrt{x}-2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \sqrt{x}-2 = 0^-$$

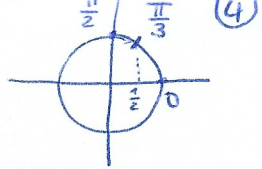
$$\lim_{x \rightarrow 4} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} 2 = 2.$$

donc par quotient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} k(x) = -\infty$$



$$1) f(x) = \frac{2}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad a = \frac{\pi}{3}.$$

Sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  la fonction sinus est strictement croissante

$$\text{donc} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \sin x \leq \sin \frac{\pi}{3}.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0.$$

$$\text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ x < \frac{\pi}{3}}} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ x > \frac{\pi}{3}}} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} 2 = 2$$

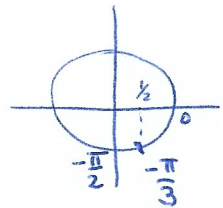
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} 2 = 2$$

donc par quotient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ x < \frac{\pi}{3}}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ x > \frac{\pi}{3}}} f(x) = +\infty$$

$$2) g(x) = \frac{5}{2\cos x - 1} \quad a = -\frac{\pi}{3}.$$



Sur  $[-\frac{\pi}{2}; 0]$  la fonction cosinus est strictement croissante

$$\text{donc} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \cos x \leq \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\cos x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2\cos x - 1 \leq 0.$$

$$\text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{3} \\ x < -\frac{\pi}{3}}} 2\cos x - 1 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{3} \\ x > -\frac{\pi}{3}}} 2\cos x - 1 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} 5 = 5$$

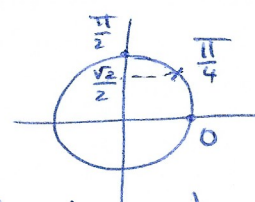
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} 5 = 5$$

donc par quotient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{3} \\ x < -\frac{\pi}{3}}} g(x) = -\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{3} \\ x > -\frac{\pi}{3}}} g(x) = +\infty.$$

3.  $h(x) = \frac{5}{2\sin^2 x - 1}$      $a = \frac{\pi}{4}$ .



⑤

Sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  la fonction sinus est strictement croissante

donc  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sin^2 x \leq \frac{2}{4}$

$\Leftrightarrow 2 \leq 2\sin^2 x \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq 2\sin^2 x - 1 \leq 0$

donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} 2\sin^2 x - 1 = 0^-$     et     $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} 2\sin^2 x - 1 = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 5 = 5$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 5 = 5$

donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} h(x) = -\infty$     et     $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} h(x) = +\infty$ .