

FONCTIONS POLYNOMES DE DEGRE 2

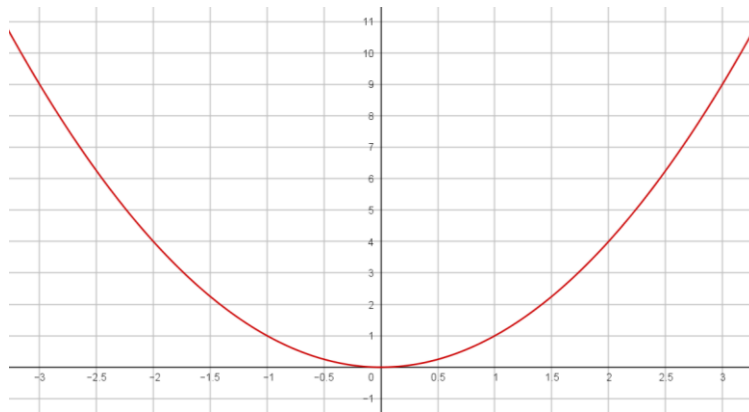
1) Rappel : la fonction carré.

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

b) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une parabole de sommet $S(0; 0)$.
La courbe admet un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées.

c) Sens de variation de la fonction carré

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f			

La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$
et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

Le minimum de la fonction carré est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

d) Signe de la fonction carré :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	+

Pour tout x réel, $x^2 \geq 0$.

La fonction carré est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

e) Parité :

On remarque que $(-2)^2 = 4 = 2^2$; $(-5)^2 = 25 = 5^2$

L'image par la fonction carré d'un nombre et de son opposé sont identiques.

$(-x)^2 = x^2$ On dira que la fonction carré est paire.

Toutes les fonctions paires ont l'axe des ordonnées comme axe de symétrie pour leur courbe représentative.

2) Les fonctions du type $g(x) = ax^2 + b$

Si $a = 1$ et $b = 0$ on retrouve la fonction carré.

a) Quelques exemples :

Pour chaque valeur de a et b suivantes :

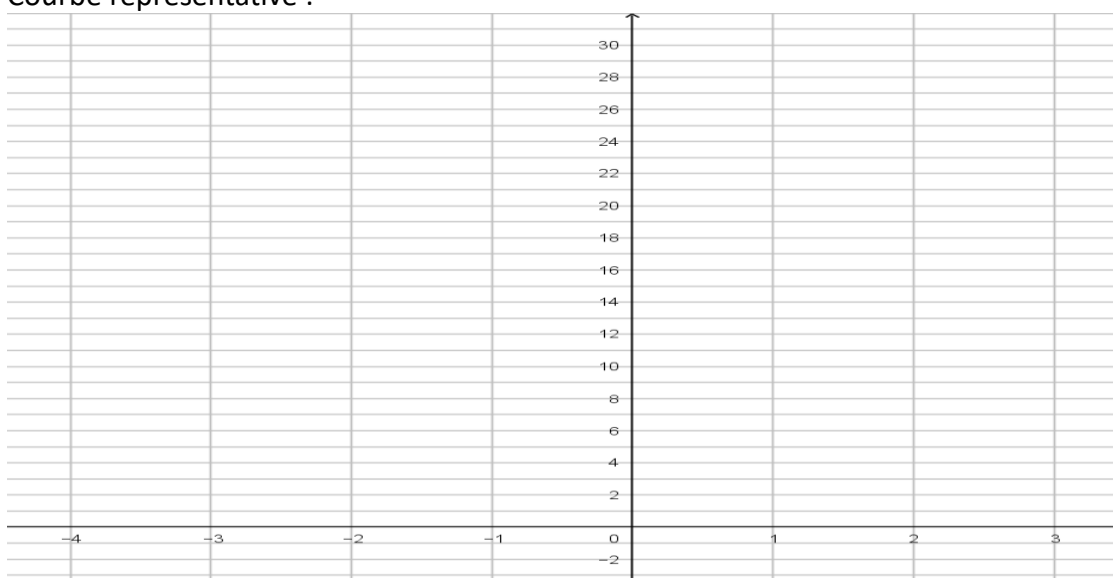
- Ecrire la fonction g correspondante.
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations
- Compléter le tableau de signes.

➤ **$a = 3$ et $b = 1$** $g(x) = \dots\dots\dots$

Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

Courbe représentative :



Axe de symétrie :

Coordonnées du sommet :

Intersections avec l'axe des abscisses :

Intersections avec l'axe des ordonnées :

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

x	
signes de $g(x)$	

➤ **a = 2 et b = -8** $g(x) = \dots\dots\dots$

Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)									

Courbe représentative :



Axe de symétrie :

Coordonnées du sommet :

Intersections avec l'axe des abscisses :

Intersections avec l'axe des ordonnées :

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

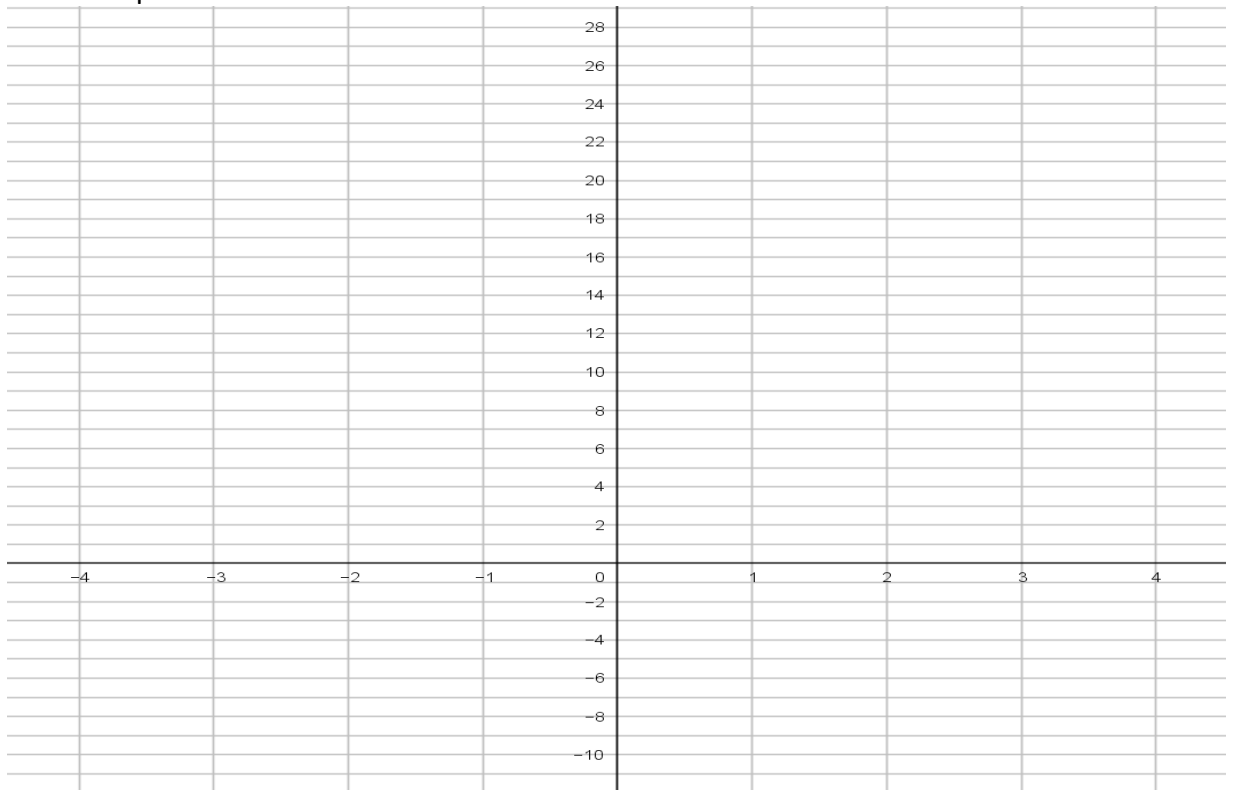
x	
signes de g(x)	

➤ **a = -3 et b = 27** $g(x) = \dots\dots\dots$

Tableau de valeurs :

x	-3,5	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)									

Courbe représentative :



Axe de symétrie :

Coordonnées du sommet :

Intersections avec l'axe des abscisses :

Intersections avec l'axe des ordonnées :

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

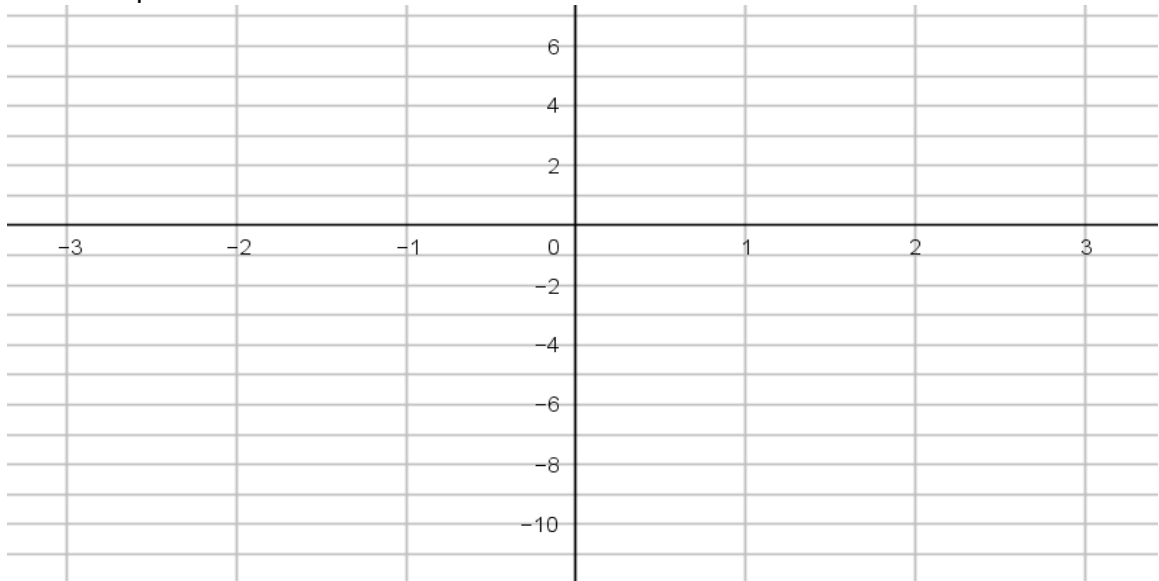
x	
signes de g(x)	

➤ **a = -1 et b = -2** $g(x) = \dots\dots\dots$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
g(x)					

Courbe représentative :



Axe de symétrie :

Coordonnées du sommet :

Intersections avec l'axe des abscisses :

Intersections avec l'axe des ordonnées :

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

x	
signes de g(x)	

b) A retenir :

$$g(x) = ax^2 + b$$

- g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.
- g est représentée par une parabole, dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées et le sommet S a pour coordonnées $(0 ; b)$.
- La fonction g est donc paire.
- Le sens de variation de g dépend du signe de a.

Si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

La parabole est tournée vers le haut.

La fonction g admet un minimum de valeur b atteint en $x = 0$.

Si $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

La parabole est tournée vers le bas.

La fonction g admet un maximum de valeur b atteint en $x = 0$.

c) Associer une courbe à une fonction du type $g(x) = ax^2 + b$:

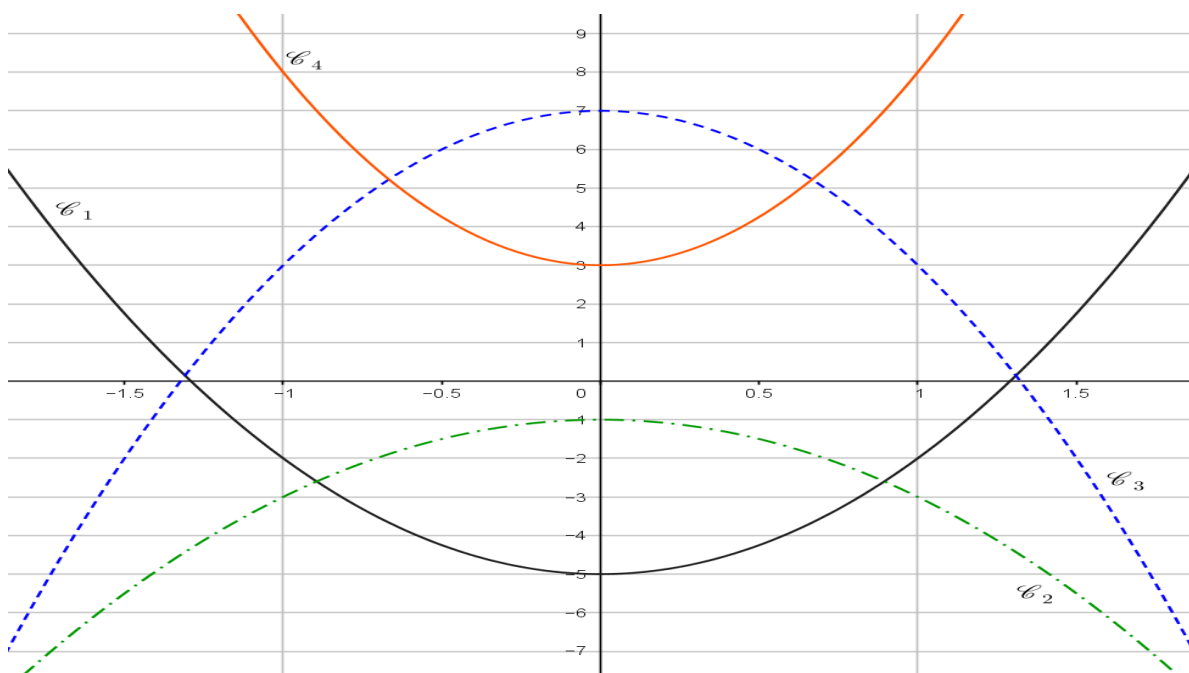
La courbe doit être une parabole ayant pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

L'ordonnée du sommet est égale à b.

Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, a est négatif.

$g(1) = a + b$ donc il suffit de lire la valeur de $g(1)$ pour trouver a.

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



3) Les fonctions du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a) Quelques exemples :

Pour chacune des fonctions suivantes:

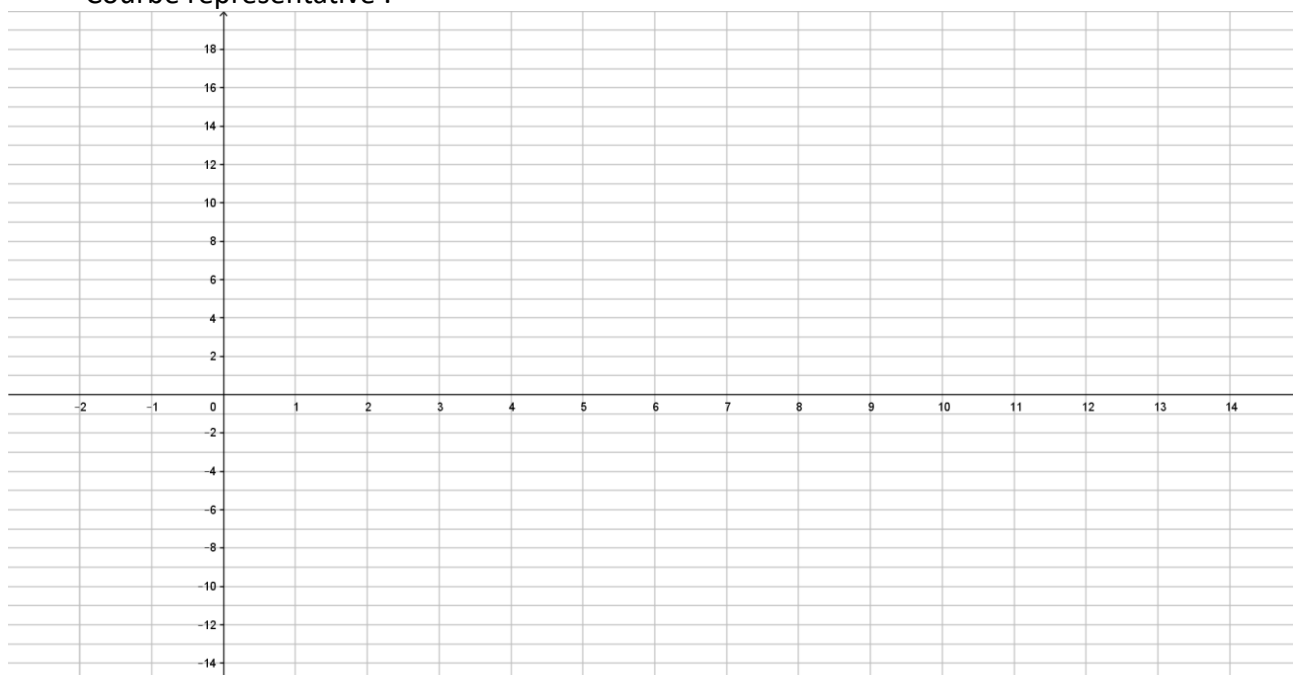
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations et le tableau de signes.

➤ $h(x) = -2(x - 7)(x - 1)$

Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h(x)									

Courbe représentative :



Axe de symétrie :

Coordonnées du sommet :

Intersections avec l'axe des abscisses :

Intersections avec l'axe des ordonnées :

Forme développée :

Tableau de variations :

x	
variations de h	

Tableau de signes :

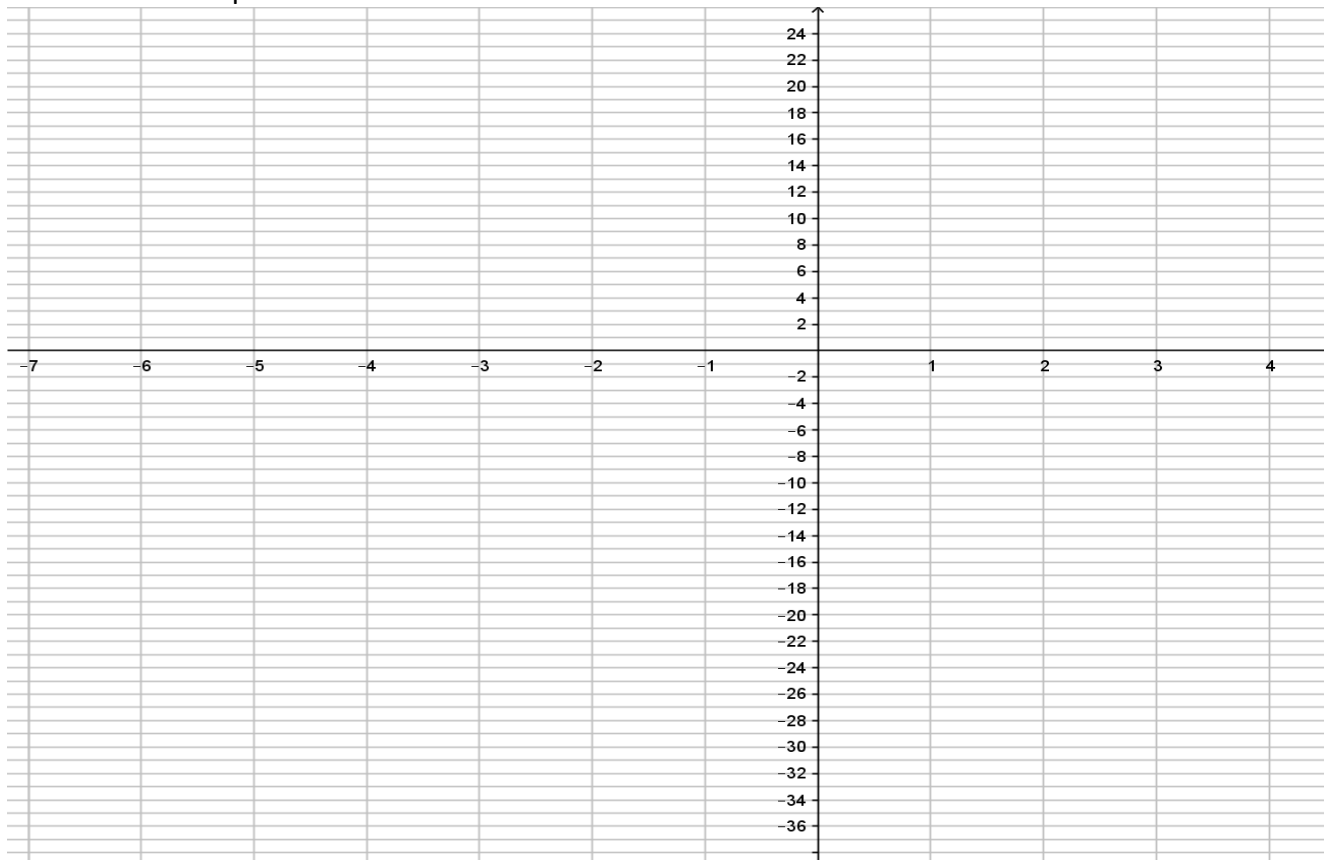
x	
signes de h(x)	

➤ $h(x) = 3(x - 2)(x + 5) = 3(x - 2)(x - (-5))$

Tableau de valeurs :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
h(x)										

Courbe représentative :



Axe de symétrie :

Coordonnées du sommet :

Intersections avec l'axe des abscisses :

Intersections avec l'axe des ordonnées :

Forme développée :

Tableau de variations :

x	
variations de h	

Tableau de signes :

x	
signes de h(x)	

b) A retenir :

$$h(x) = a (x - x_1) (x - x_2)$$

➤ h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

➤ C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.

En effet $a (x - x_1) (x - x_2)$ est la forme factorisée d'un polynôme de degré 2.

ATTENTION : Tous les polynômes de degré 2 ne sont pas factorisables.

Pour ceux qui ne seront pas factorisables, la courbe ne coupera pas l'axe des abscisses.

➤ h est représentée par une parabole, tournée vers le haut si a est positif, tournée vers le bas si a est négatif, et dont l'axe de symétrie est l'axe vertical passant par le milieu de x_1 et x_2 .

➤ Le sens de variation de h dépend du signe de a.

Si a > 0

x	$-\infty$	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	$+\infty$
variations de h			

La parabole est tournée vers le haut.

La fonction h admet un minimum

atteint en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Si a < 0

x	$-\infty$	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	$+\infty$
variations de h			

La parabole est tournée vers le bas.

La fonction h admet un minimum

atteint en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

➤ La parabole coupe l'axe des ordonnées en $x = x_1$ et en $x = x_2$.

En effet, pour déterminer les intersections d'une courbe avec l'axe des abscisses, on cherche les antécédents de 0 par la fonction donc on résout l'équation $h(x) = 0$.

$$\text{Or } h(x) = 0 \Leftrightarrow a (x - x_1) (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{ou } x - x_1 = 0 \quad \text{ou } x - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{pas possible} \quad \quad \quad x = x_1 \quad \text{ou} \quad \quad x = x_2$$

Donc 0 a deux antécédents par h : $x = x_1$ et $x = x_2$.

x_1 et x_2 sont les deux valeurs qui annulent h, on dit que ce sont les **racines** de h(x).

➤ Signe de h(x) :

Si a > 0

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
signes de h	+	0	-	0	+
	signe de a		signe de -a		signe de a

Si a < 0

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
signes de h	-	0	+	0	-
	signe de a		signe de -a		signe de a

➤ **CAS PARTICULIER : $x_1 = x_2$**

$$\text{Alors } h(x) = a (x - x_1) (x - x_1) = h(x) = a (x - x_1)^2.$$

La courbe de la fonction h ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point d'abscisse x_1 .

Signe de h(x) :

Si a > 0

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
signes de h	+	0	+
	signe de a		signe de a

Si a < 0

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
signes de h	-	0	-
	signe de a		signe de a

c) Associer une courbe à une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

La courbe doit couper l'axe des abscisses en deux points ce qui permet de trouver x_1 et x_2 .

Si la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point alors on a $x_1 = x_2$.

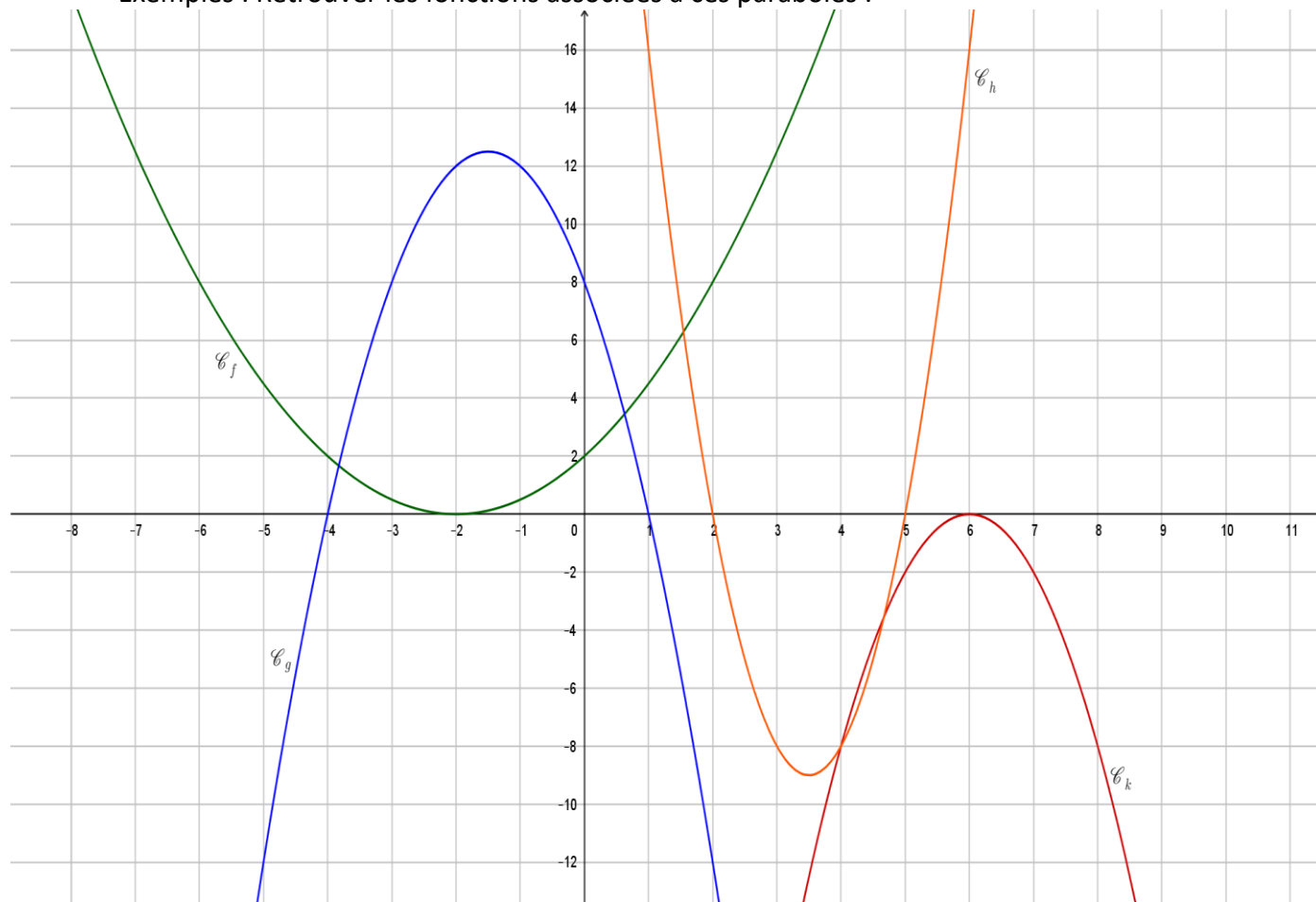
Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, a est négatif.

Pour trouver a , on choisit un point de la courbe.

Par exemple $M(x_M; y_M)$ et on écrit que $h(x_M) = y_M$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation pour trouver a .

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



d) Déterminer le signe d'une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

Il faudra faire un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de a	signe de a		signe de a	
signe de $x - x_1$	-	0	+	+
signe de $x - x_2$	-	-	0	+
signe de $h(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0

Exemples :

➤ Déterminer le signe de $h(x) = 5(x + 4)(x - 1)$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de a		
signe de $x + 4$		
signe de $x - 1$		
signe de $h(x)$		

➤ Déterminer le signe de $h(x) = -3(x + 5)^2$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de a		
signe de $(x + 5)^2$		
signe de $h(x)$		

e) Factoriser un polynôme de degré 2 si on connaît une racine x_1 :

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ et que $f(x_1) = 0$ alors f est factorisable et peut s'écrire :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

On remplace a et x_1 par leur valeur respective, on développe et on égalise les coefficients des termes de même degré. On appelle cette technique, **l'identification des polynômes**.

Exemple : $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$. Une racine de ce polynôme est $x = -4$.

Factoriser f .

-4 est une racine donc $x_1 = \dots\dots\dots$

f peut alors s'écrire $f(x) = \dots\dots\dots$

On développe $f(x)$.

On a $f(x) = \dots\dots\dots x^2 + (\dots\dots\dots) \times x + \dots\dots\dots$

Or $f(x) = 3x^2 + 9 \times x + (-12)$

On égalise les coefficients des termes de même degré

$\dots\dots\dots = 9$ et $\dots\dots\dots = -12$

La dernière équation permet de trouver $x_2 = \dots\dots\dots$

On peut alors vérifier rapidement que cette valeur vérifie la première équation.

Il ne reste plus qu'à écrire la forme factorisée de f en remplaçant a , x_1 et x_2

par leur valeur respective.

$f(x) = \dots\dots\dots$

Exercice : Factoriser $g(x) = -x^2 + 2x + 15$ sachant que 5 est une racine de $g(x)$.