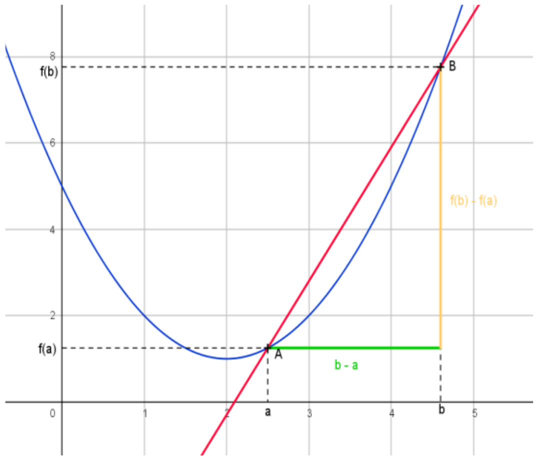
Révisions : DERIVATION D'UNE FONCTION

I. Nombre dérivé et tangente :



1) Définitions :

a) Taux de variation d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit a et b deux réels distincts de I.
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
On pose A (a ; $f(a)$) et B (b ; $f(b)$) deux points de $(\mathscr{C})$.
Le taux de variation ou taux d'accroissement de la fonction f entre a et b est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Ce taux de variation est aussi le coefficient directeur de la droite (AB).

Remarque : si $b = a + h$ avec $h \neq 0$ le taux d'accroissement de f entre a et a + h est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

b) Nombre dérivé d'une fonction en un point :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a .
On dit que f est dérivable en a si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (taux de variation de f entre a + h et a)

tend vers un nombre fini quand h tend vers 0.
Ce nombre est le nombre dérivé de f en a et se note $f\,'(a)$.

Exemples : 1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x^2 est dérivable en a = 3 et donner la valeur de f '(3).

$f(3+h) - f(3) = (3+h)^2 - 3^2 = h^2 + 6h$

$\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{h^2+6h}{h} = h + 6$ Quand h tend vers 0 , h + 6 tend vers 6.

On dira donc que f est dérivable en 3 et que f '(3) = 6.

2) Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x}$.

Il faut évidemment que h soit positif .

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Quand h tend vers 0 , il y a un problème ! $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ va tendre vers + ∞

Donc la fonction racine carrée ne sera pas dérivable en 0.

2) Aspect géométrique du nombre dérivé :

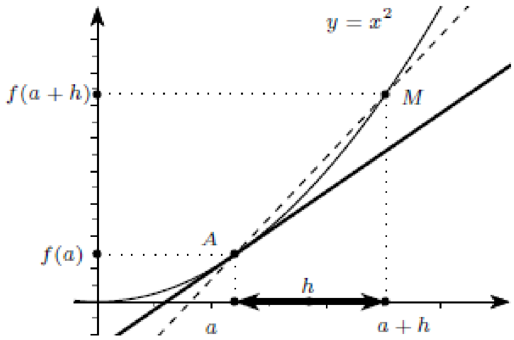
Soit f une fonction dérivable en a .
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f .
A (a ; $f(a)$) et M ($a+h$; $f(a+h)$).

La droite (AM) a pour coefficient directeur le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Si la fonction f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet une tangente en a et **$f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.**
La droite (AM) est la tangente à la courbe représentative de f au point A .

Définition :

Soit f une fonction dérivable en a .
La tangente à la courbe représentative de f au point A (a ; $f(a)$) est la droite passant par le point A et de **coefficient directeur $f'(a)$** .
Son équation réduite est **$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.**



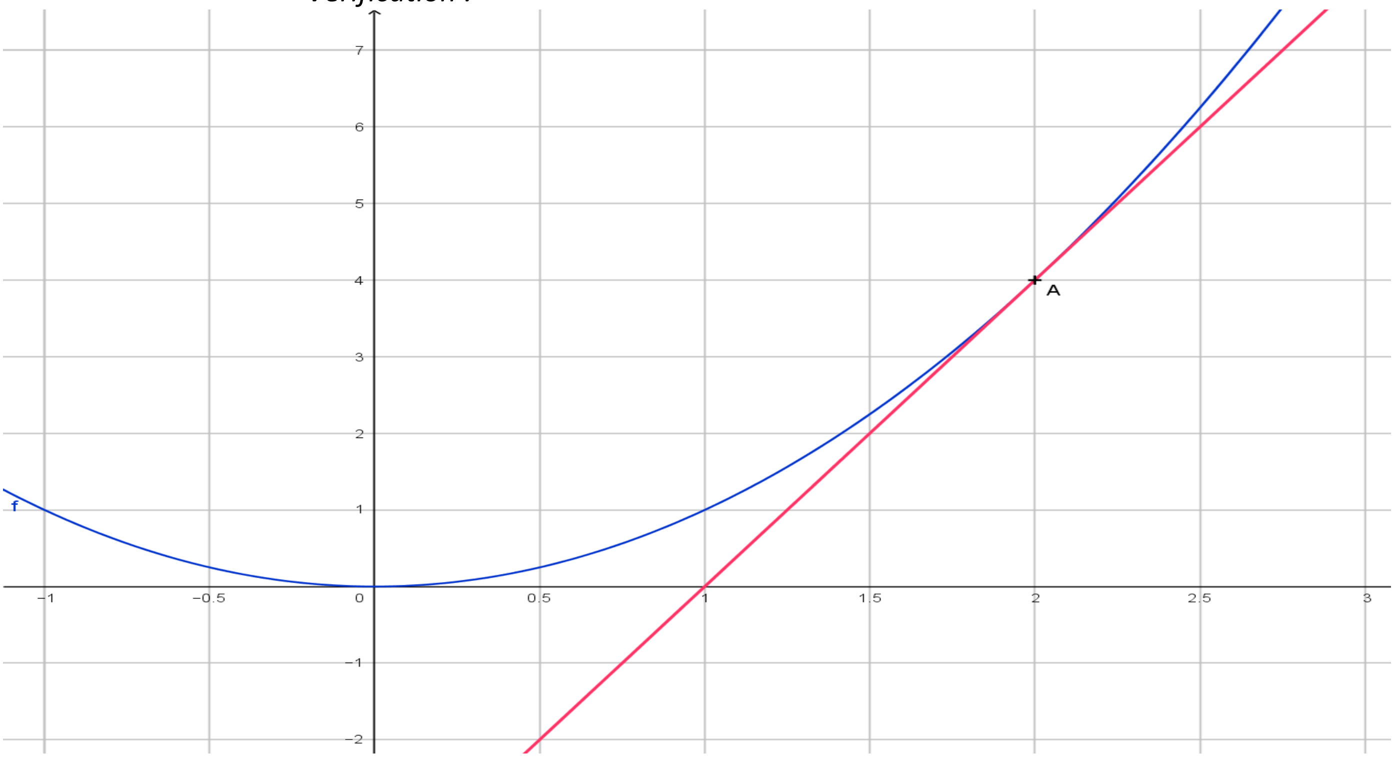
Cas particulier : si $f'(a) = 0$ la tangente sera horizontale. Elle aura pour équation $y = f(a)$

Exemple : Soit f la fonction carré $f(x) = x^2$. Soit a un réel quelconque.
Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A (a ; $f(a)$).
En déduire l'équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en 2.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$$

Quand h tend vers 0 , $2a+h$ tend vers $2a$ donc $f'(a) = 2a$.
La tangente en A (a ; $f(a)$) a pour équation $y = 2a(x-a) + a^2$.
Si $a = 2$ alors la tangente aura pour équation $y = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$.

Vérification :



II. DERIVEE DE FONCTIONS USUELLES :

1) Définition de la fonction dérivée :

Si f est une fonction dérivable en tout point a d'un intervalle I ,
on dit que f est dérivable sur l'intervalle I.
La fonction qui , à tout x de I associe $f'(x)$, s'appelle la fonction dérivée de f sur I.
Elle est notée f'.

2) Exemples :

a) Soit f la fonction constante définie par $\boldsymbol{f(x) = C}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour a réel , $f'(a) = 0$

Donc la fonction dérivée de la fonction constante est la fonction nulle.
On a : Pour tout réel x $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.

b) Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = m\,x + p}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour a réel , $f'(a) = m$

Donc la fonction dérivée d'une fonction affine est la fonction constante qui , à x , associe m.
On a : Pour tout réel x $\boldsymbol{f'(x) = m}$.

Remarque : Si f est linéaire donc si p = 0 la fonction dérivée ne change pas. $f'(x) = m$.

Exemple : Trouver la fonction dérivée de f définie par $f(x) = -\frac{5}{3}x + 7$.

c) La fonction carré :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour a réel , $f'(a) = 2a$

Donc la fonction dérivée de la fonction carré est la fonction qui , à x , associe $2x$.
On a : pour tout réel x , $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.

d) La fonction cube :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^3}$
On a pour a réel et h proche de 0 ,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{a^3 + 3a^2h + 3a\,h^2 + h^3 - a^3}{h} = 3\,a^2 + 3\,ah + h^2$$

Quand h tend vers 0 , $3\,a^2 + 3\,ah + h^2$ tend vers $3\,a^2$.
Donc la fonction dérivée de la fonction cube est la fonction qui , à x , associe $3x^2$.
On a : pour tout réel x , $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$.

e) La fonction puissance :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ avec n entier.
En faisant le même calcul on obtient $\boldsymbol{f'(x) = n\,x^{n-1}}$.

Exemples : Trouver les fonctions dérivées de f , g et h définies par $f(x) = x^8$; $g(x) = x^4$ et $h(x) = x^{128}$

f) La fonction inverse :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ par $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$.

$$f(x+h) = \frac{1}{x+h} \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{h} = \frac{x-x-h}{(x+h)\,x} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{(x+h)\,x}$$

Quand h tend vers 0, $-\frac{1}{(x+h)\,x}$ tend vers $-\frac{1}{x^2}$ donc $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

Généralisation admise :

Pour tout entier naturel n non nul, la fonction f définie sur IR– {0} par $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^n}}$ est dérivable

et sa dérivée est définie sur IR– {0} par $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}}$

Exemples : Trouver les fonctions dérivées de f, g et h définies par $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $g(x) = \frac{1}{x^4}$ et $h(x) = x^{-3}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \quad ; \quad g'(x) = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x^3} \text{ donc } h'(x) = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$$

g) La fonction racine carrée :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$

on prend $x > 0$ car cette fonction n'est pas dérivable en 0. et $h > 0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Quand h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

g) Tableau récapitulatif : **A CONNAITRE PAR COEUR**

Ensemble de définition de la fonction f	Fonction f	Fonction f'	Ensemble de définition de la fonction dérivée f'
R	$f(x) = C$	$f'(x) = 0$	**R**
R	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	**R**
R	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	**R**
R	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	**R**
R	$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	**R**
$]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$
R \ {0}	$f(x) = \frac{1}{x^n} \; n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R}^*$
$[0 ; +\infty [$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty [$

III. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES :

1) Produit d'une fonction par un réel :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si k est un réel alors

la fonction ku est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$.

2) Somme de deux fonctions dérivables :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$ alors
la fonction $u + v$ est dérivable sur I et on a $(u + v)' = u' + v'$.

Exemple : Trouver la dérivée de f définie par $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$$

3) Produit de deux fonctions dérivables :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
alors $u \times v$ est dérivable sur I et on a : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

Exemple : Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x - 3)(2 - 6x)$
$f'(x) = 5(2 - 6x) + (5x - 3) \times (-6) = 10 - 30x - 30x + 18 = -60x + 28$

Remarque : Si on développe et si on dérive ensuite, on obtient le même résultat.
$f(x) = 10x - 6 - 30x^2 + 18x = -30x^2 + 28x - 6$

4) Puissance d'une fonction dérivable :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
alors pour tout $n > 0$ $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$
Cette propriété s'étend à $n < 0$ si $u(x) \neq 0$ pour tout x de I.

Applications :

$(u^2)' = 2u'u$; $(u^3)' = 3u'u^2$;

si $u(x) > 0$ pour tout x de I $(\sqrt{u})' = (u^{1/2})' = \dfrac{1}{2}u'u^{-1/2} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

si $u(x) \neq 0$ pour tout x de I $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = (u^{-1})' = -1\,u'u^{-2} = -\dfrac{u'}{u^2}$

Exemple : Trouver les dérivées de f et g définies sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ et $g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 4}$.

$f'(x) = 3 \times \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = -\dfrac{6x}{(x^2 - 1)^2}$; $g'(x) = \dfrac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 4}}$

3) Quotient de deux fonctions dérivables :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si v(x) $\neq$ 0 pour tout x de I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple :

$f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2+8x-9}$. Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer $f\,'(x)$.

Ensemble de définition de f : *Il faut que* $2x^2 + 8x - 9$ *soit non nul .*

$2x^2 + 8x - 9 = 0$

$\Delta = 64 + 72 = 136 = 4 \times 34$

$x_1 = \dfrac{-8-2\sqrt{34}}{4} = \dfrac{-4-\sqrt{34}}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{-8+2\sqrt{34}}{4} = \dfrac{-4+\sqrt{34}}{2}$

Sur $\left]-\infty ; \dfrac{-4-\sqrt{34}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-4-\sqrt{34}}{2} ; \dfrac{-4+\sqrt{34}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-4+\sqrt{34}}{2} ; +\infty\right[$

la fonction f est définie donc dérivable.

$u(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x} - 5$ $\qquad v(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^2 + 8\boldsymbol{x} - 9$

$u'(\boldsymbol{x}) = 3$ $\qquad v'(\boldsymbol{x}) = 4\boldsymbol{x} + 8$

On a : $f\,'(x) = \dfrac{3(2x^2+8x-9) - (3x-5)(4x+8)}{(2x^2+8x-9)^2}$

$= \dfrac{6x^2 + 24x - 27 - 12x^2 + 20x - 24x + 40}{(2x^2+8x-9)^2}$

$f\,'(x) = \dfrac{-6x^2 + 20x + 13}{(2x^2+8x-9)^2}$

Tableau récapitulatif : **A CONNAITRE PAR CŒUR**

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de IR.

Fonction	Dérivée
k u avec k $\in$ IR	**k u'**
u + v	**u' + v'**
u $\times$ v	**u' v + u v'**
$\sqrt{u}$ avec u($\boldsymbol{x}$) $\geq$ 0	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\dfrac{1}{u}$ avec u($\boldsymbol{x}$) $\neq$ 0	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ avec v($\boldsymbol{x}$) $\neq$ 0	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$