TSpé FICHE DE REVISIONS FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 : Simplifier les écritures suivantes :

A= $(e^{x})^3 \times e^{-2x+4} \times e^{7x+1}$ B = $\dfrac{e^{-4x+8} \times (e^{-x})^2}{e^{3x^2-x+4}}$ C= $(e^{2x-1})^4 \times e^{-3x+4} \times e^{7x+2}$ D = $\dfrac{e^{-7x+8} \times (e^{-3x+4})^2}{e^{3x^2-x+4} \times e^{x}}$

Exercice 2 : Résoudre dans R les équations ou inéquations suivantes :

1) $e^{3-4x} = 1$ 2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ 3) $e^{x-7} = -1$ 4) $e^{2x^2+3} = e^{-1}$

5) $e^{x^2} < -3$ 6) $(e^{x})^3 \geq e^{x+6}$ 7) $e^{x} > \dfrac{1}{e^{x}}$ 8) $(e^{x} + 4)(e^{x} - 1) > 0$

Exercice 3 :

On définit les fonction ch et sh, respectivement sinus et cosinus hyperbolique, sur R par

$\text{ch}(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$. Démontrer que $[\text{ch}(x)]^2 - [\text{sh}(x)]^2 = 1$.

Exercice 4 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur les réels

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^{x}$ 2) $f(x) = 5e^{x} - 3e^{2x}$ 3) $f(x) = \dfrac{2e^{x}-3}{e^{x}+3}$

4) $f(x) = 7x - 8 + 2e^{-x}$ 5) $f(x) = e^{-3x^2+7}$ 6) $f(x) = (2e^{x} + 3)(e^{x} - 5)$

7) $f(x)= \dfrac{e^{x}-5}{2e^{x}+1}$ 8) $f(x) = (7e^{-x} + 6)^2$

Exercice 5 :

f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (-3x + 4)\,e^{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f sur les réels
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Exercice 6 :

g est une fonction définie sur les réels par $g(x) = \dfrac{5e^{x}}{e^{x}+4}$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de g sur les réels
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 1.

Exercice 7 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^{3x}$ avec a , b et c des réels.

Les points A (0 ; – 3) et B (1 ; – 6e^3) sont deux points de C_f , la courbe représentative de f .

De plus la tangente à C_f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur – 7.

Déterminer a , b et c.

Correction Fiche de révisions : Fonction exponentielle

Exercice 1 : Simplifier les écritures suivantes :

A= $(e^x)^3 \times e^{-2x+4} \times e^{7x+1} = e^{3x} \times e^{5x+5} = e^{8x+5}$

B = $\dfrac{e^{-4x+8} \times (e^{-x})^2}{e^{3x^2-x+4}} = \dfrac{e^{-4x+8} \times e^{-2x}}{e^{3x^2-x+4}} = \dfrac{e^{-6x+8}}{e^{3x^2-x+4}} = e^{-3x^2-5x+4}$

C= $(e^{2x-1})^4 \times e^{-3x+4} \times e^{7x+2} = e^{8x-4} \times e^{4x+6} = e^{12x+2}$

D = $\dfrac{e^{-7x+8} \times (e^{-3x+4})^2}{e^{3x^2-x+4} \times e^x} = \dfrac{e^{-7x+8} \times e^{-6x+8}}{e^{3x^2+4}} = \dfrac{e^{-13x+16}}{e^{3x^2+4}} = e^{-3x^2-13x+12}$

Exercice 2 : Résoudre dans R les équations ou inéquations suivantes **:**

1) $e^{3-4x} = 1$
$e^{3-4x} = e^0$
$3 - 4x = 0$
$x = \dfrac{3}{4}$
$S = \{ \dfrac{3}{4} \}$

2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$
$2x^2 + 3 = 7x$
$2x^2 - 7x + 3 = 0$
$\Delta = 49 - 24 = 25$
$x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+5}{4} = 3$
$S = \{ \dfrac{1}{2} ; 3 \}$

3) $e^{x-7} = -1$
$S = \varnothing$

4) $e^{2x^2+3} = e^{-1}$
$2x^2 + 3 = -1$
$2x^2 = -4$
$x^2 = -2$
$S = \varnothing$

5) $e^{x^2} < -3$
$S = \varnothing$

6) $(e^x)^3 \geq e^{x+6}$
$e^{3x} \geq e^{x+6}$
$3x \geq x + 6$
$2x \geq 6$
$x \geq 3$
$S = [3 ; +\infty [$

7) $e^x > \dfrac{1}{e^x}$
$e^x > e^{-x}$
$x > -x$
$2x > 0$
$x > 0$
$S =] 0 ; +\infty[$

8) $(e^x + 4)(e^x - 1) > 0$

$e^x + 4 \geq 0$
$e^x \geq -4$
$S = \mathbb{R}$

$e^x - 1 \geq 0$
$e^x \geq 1$
$e^x \geq e^0$
$x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de $e^x + 4$	+		+
signes de $e^x - 1$	–	0	+
signes de $(e^x + 4)(e^x - 1)$	–	0	+

$S =] 0 ; +\infty[$

Exercice 3 :

On définit les fonction ch et sh, respectivement sinus et cosinus hyperbolique, sur R par

$ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Démontrer que $[ch(x)]^2 - [sh(x)]^2 = 1$.

$\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

Exercice 4 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur les réels

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$u(x) = x^2 - 2x \qquad u'(x) = 2x - 2$
$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x$

$= (2x - 2 + x^2 - 2x)e^x$

$= (x^2 - 2)e^x$

2) $f(x) = 5e^x - 3e^{2x}$

$f'(x) = 5e^x - 3 \times 2\, e^{2x}$
$= 5e^x - 6e^{2x}$

$= e^x (5 - 6e^x)$

3) $f(x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x+3}$

$u(x) = 2e^x - 3 \qquad u'(x) = 2e^x$
$v(x) = e^x + 3 \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = \dfrac{2e^x (e^x + 3) - (2e^x - 3)e^x}{(e^x + 3)^2}$

$= \dfrac{e^x (2e^x + 6 - 2e^x + 3)}{(e^x + 3)^2}$

$= \dfrac{9e^x}{(e^x + 3)^2}$

4) $f(x) = 7x - 8 + 2e^{-x}$
$f'(x) = 7 - 2\, e^{-x}$

5) $f(x) = e^{-3x^2+7}$
$f'(x) = -6x\, e^{-3x^2+7}$

6) $f(x) = (2e^x + 3)(e^x - 5)$

$u(x) = 2e^x + 3 \qquad u'(x) = 2e^x$
$v(x) = e^x - 5 \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2e^x (e^x - 5) + (2e^x + 3)e^x$

$= (2e^x - 10 + 2e^x + 3)e^x$

$= (4e^x - 7)e^x$

7) $f(x)= \dfrac{e^x-5}{2e^x+1}$

$u(x) = e^x - 5 \qquad u'(x) = e^x$
$v(x) = 2e^x + 1 \qquad v'(x) = 2e^x$

$f'(x) = \dfrac{e^x (2e^x + 1) - (e^x - 5)(2e^x)}{(2e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{e^x (2e^x + 1 - 2e^x + 10)}{(2e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{11e^x}{(2e^x + 1)^2}$

8) $f(x) = (7e^{-x} + 6)^2$

$u(x) = 7e^{-x} + 6 \qquad u'(x) = -7e^{-x}$
$f'(x) = 2 \times (-7e^{-x}) \times (7e^{-x} + 6)$

$f'(x) = -14e^{-x} \times (7e^{-x} + 6)$

Exercice 5 :

f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (- 3x + 4)\, e^x$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f sur les réels

$u(x) = - 3x + 4 \qquad u'(x) = - 3x$
$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$
$f'(x) = - 3x\, e^x + (- 3x + 4)e^x = (- 3x - 3x + 4)e^x = (- 6x + 4)e^x$

Signe de $f'(x)$: e^x est strictement positif sur ℝ donc $f'(x)$ est du signe de $- 6x + 4$.

$- 6x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow - 6x \geq - 4 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{2}{3}$

Tableau de variation de f : $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = (- 3\times\dfrac{2}{3} + 4) = 2$

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
signes de $f'(x)$		+	0	–	
variations de f		↗		↘	

2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

$y = f'(0)(x + 0) + f(0)$
$y = 4x + 4$

Exercice 6 :

g est une fonction définie sur les réels par $g(x) = \dfrac{5e^x}{e^x + 4}$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de g sur les réels.

$$g'(x) = \frac{5e^x\,(e^x + 4) - 5e^x\,(e^x)}{(e^x + 4)^2} = \frac{20e^x}{(e^x + 4)^2} \qquad g'(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

2. Déterminer l'équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 1.

$$y = g'(1)\,(x - 1) + g(1) \quad \text{or} \quad g(1) = \frac{5e}{e + 4} \quad \text{et} \quad g'(1) = \frac{20e}{(e + 4)^2}$$

$$\text{donc} \quad y = \frac{20e}{(e + 4)^2}\,(x - 1) + \frac{5e}{e + 4} \quad \text{donc} \quad y = \frac{20e}{(e + 4)^2}\,x + \frac{5e^2}{(e + 4)^2}$$

Exercice 7 :

$f(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^{3x}$ avec a , b et c des réels.

A (0 ; – 3) $\in C_f$ donc $f(0) = -3 \Leftrightarrow c = -3$ donc $f(x) = (ax^2 + bx - 3)\,e^{3x}$

et B (1 ; – 6e³) $\in C_f$ donc $f(1) = -6e^3 \Leftrightarrow a + b - 3 = -6 \Leftrightarrow a + b = -3$.

De plus la tangente à C_f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur – 7 donc $f'(0) = -7$

$f'(x) = (2ax + b)\,e^{3x} + (ax^2 + bx - 3) \times (3e^{3x}) = e^{3x}\,(3ax^2 + 3bx + 2ax + b - 9)$

$f'(0) = -7 \Leftrightarrow b - 9 = -7 \Leftrightarrow b = 2$

$a + b = -3$ donc $a = -3 - 2 = -5$

Donc $f(x) = (-5x^2 + 2x - 3)\,e^{3x}$

CORRECTION