

Travaux de groupe

Exercice 1.

Au goûter du centre de vacances, Céline prend un gâteau fourré puis une brique de jus de fruits. Dans un premier sac, il y a 12 gâteaux à l'orange et 36 gâteaux à la fraise. Dans un second sac, il y a 24 briques de jus de pomme et 24 briques de jus de raisin.

a. Construire un arbre de probabilités illustrant cette situation pour donner l'ensemble E des issues. On notera :

- O le choix d'un gâteau à l'orange,
- F le choix d'un gâteau à la fraise,
- P le choix d'une brique de jus de pomme
- R le choix d'une brique de jus de raisin.

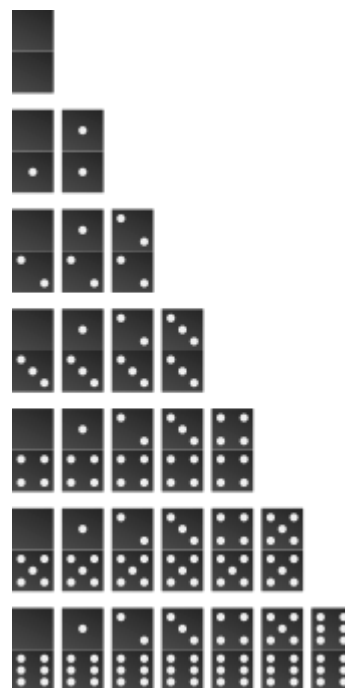
b. Calculer la probabilité de l'événement : « Céline a pris un gâteau à l'orange et un jus de pomme ».

Exercice 2

Un domino est composé de deux cases portant chacune un nombre de points compris entre 0 et 6. Un même nombre peut figurer dans les deux cases. Un jeu de dominos en comporte 28.

On pioche un domino au hasard et on considère la variable aléatoire X égale à la différence entre la plus grande valeur et plus petite valeur du domino.

- a. Préciser les valeurs prises par X.
b. Décrire l'événement $\{X=3\}$ et en déduire $P(X = 3)$.
c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.



Exercice 3

On lance un dé cubique parfaitement équilibré:

- lorsque le 6 sort, on reçoit 6 €;
- lorsque le 5 sort, on reçoit 1 €;
- dans les autres cas, on ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire qui, à une partie, associe le gain du joueur

- a. Calculer $E(X)$.
b. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 4.

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €. Pour le promouvoir l'association annonce qu'à l'entrée du spectacle, chaque client lancera un dé cubique non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

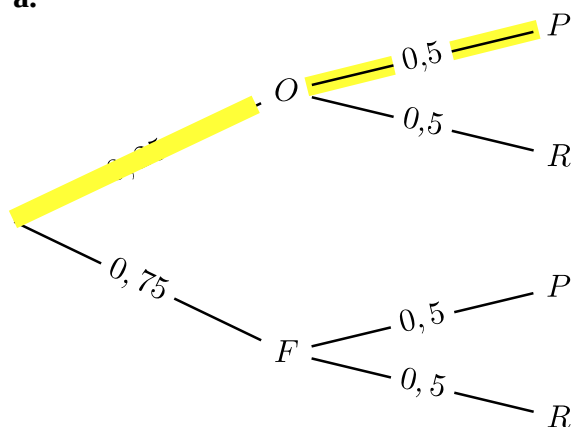
- Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite.
- Si le résultat est 1, l'entrée est à demi-tarif.
- Si le résultat est 5, le client a une remise de 20 %.
- Dans les autres cas, le client paie plein tarif.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat du lancer de dé, associe le prix que paiera le client.

1. Montrer que la variable aléatoire X prend les valeurs 0, 10, 16 et 20.
2. Déterminer la loi de probabilité de X (les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles).
3. Calculer la probabilité de l'événement $X \leq 10$
4. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.
5. Que peut-on en déduire pour l'association si la salle composée de 900 places est pleine ?

Correction ex 1

a.



Quelques explications :

Le choix du gâteau et du jus sont indépendants, on aurait pu faire l'arbre dans l'autre sens.

Il y a 12 gâteaux à l'orange sur $12+36=48$ gâteaux donc :

$$P(O) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\text{De même } P(F) = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Il y a autant de jus de pomme que de jus de raisins donc

$$P(R) = P(P) = \frac{1}{2} = 0,5$$

b. On cherche la probabilité de la branche surlignée en jaune :

$$P(O \cap P) = P(O) \times P(P) = 0,25 \times 0,5 = 0,125$$

Correction ex 2.

Tous les dominos sont différents

a. La plus petite différence est 0 (si les deux cotés du dominos ont la même valeur)

La plus grande différence est 6 (si les deux cases sont 0 et 6)

L'ensemble des valeurs prisent par X est donc $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

b. $\{X=3\}$ est l'événement la différence entre la plus grande valeur et plus petite valeur du domino est égale à 3.

Il y a 4 dominos qui permettent d'avoir 3

3	0
4	1
5	2
6	3

On peut le noter $\{X=3\} = \{3|0 ; 4|1 ; 5|2 ; 6|3\}$

$$\text{donc } P(X = 3) = \frac{4}{28}$$

c. On procède de même pour les autres valeurs prisent par X :

- $\{X=0\} = \{0|0 ; 1|1 ; 2|2 ; 3|3 ; 4|4 ; 5|5 ; 6|6\}$ donc $P(X = 0) = \frac{7}{28}$
- $\{X=1\} = \{1|0 ; 2|1 ; 3|2 ; 4|3 ; 5|4 ; 6|5\}$ donc $P(X = 1) = \frac{6}{28}$
- $\{X=2\} = \{2|0 ; 3|1 ; 4|2 ; 5|3 ; 6|4\}$ donc $P(X = 2) = \frac{5}{28}$
- $\{X=4\} = \{4|0 ; 5|1 ; 6|2\}$ donc $P(X = 4) = \frac{3}{28}$
- $\{X=5\} = \{5|0 ; 6|1\}$ donc $P(X = 5) = \frac{2}{28}$
- $\{X=6\} = \{6|0\}$ donc $P(X = 6) = \frac{1}{28}$

On peut le résumer dans un tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

Correction ex 3.

a. X prend pour valeurs 0; 1 ou 6 et $P(X = 6) = \frac{1}{6}$; $P(X = 1) = \frac{1}{6}$; $P(X = 4) = \frac{1}{6}$

Donc $E(X) = 6 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{4}{6} \approx 1,16$

b. Le gain moyen espéré sur un grand nombre de partie est $E(X) > 0$, ce jeu est à l'avantage du joueur. (cela est cohérent avec la situation car le joueur ne paie pas pour participer)

Correction ex 4

1. D'après l'énoncé :

- Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite , X prend alors la valeur 0.
- Si le résultat est 1, l'entrée est à demi-tarif, X prend alors la valeur $20 \div 2 = 10$.
- Si le résultat est 5, le client a une remise de 20 %, X prend alors la valeur $20 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 20 \times 0,8 = 16$.
- Dans les autres cas, le client paie plein tarif. X prend alors la valeur 20.

2. Le dé n'est pas pipé donc chaque face a une chance sur 6 de sortir. On en déduit la loi de probabilité suivante :

x_i	0	10	16	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

3. $P(X \leq 10) = P(X = 0 \text{ ou } X = 10) = P(X = 0) + P(X = 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4. $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{3}{6} = \frac{83}{6} \approx 14,33$

Le prix moyen des entrées payées par les visiteurs sera de 14,33 €

5. La recette espérée sera de $900 \times 14,33 = 12900$