Nom, Prénom : …………………………………………………. **Jeudi 16 Décembre 2021**

<u>TSpé DEVOIR SURVEILLE N°4 /40 (1,5 points de bonus) (2h)</u>

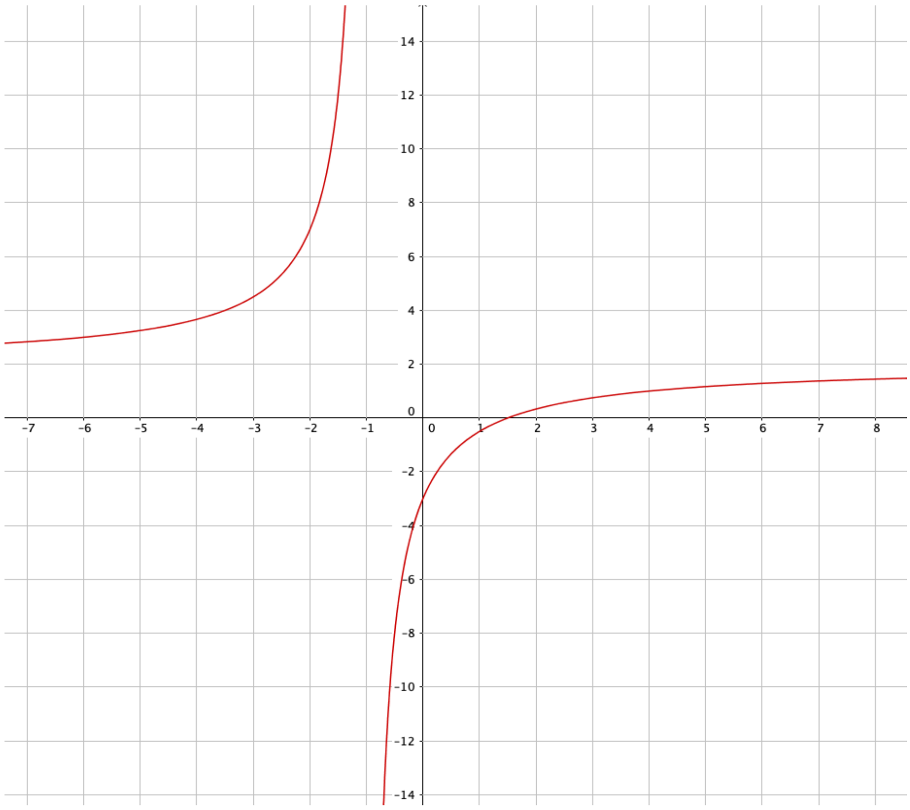
Pour ce devoir, les élèves ayant préparé les fiches de synthèse demandées auront le droit de s'en servir.
Ceux qui n'ont pas préparé ces fiches travailleront sans document.
La calculette en mode examen est autorisée.

/40

1,5 point de bonus

<u>Exercice 1:</u> *(8 points)*

Voici la courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$.



1) Lire sur le graphique les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$ et en -1 à droite et à gauche.

2) La fonction représentée est la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.
   Déterminer par le calcul les limites lues sur le graphique.

3) Etudier la convexité de la fonction f.

4) La courbe de f admet-elle un ou des points d'inflexion ? Si oui, lesquels ?

Exercice 2: *(8,5 points)*

Déterminer les limites suivantes, en justifiant avec soin :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + 2x^2 + 3x - 2)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - 3}{(x-1)^2}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{3x+2}{x-4}}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x \sin(x))$

Exercice 3 : *(9,5 points)*

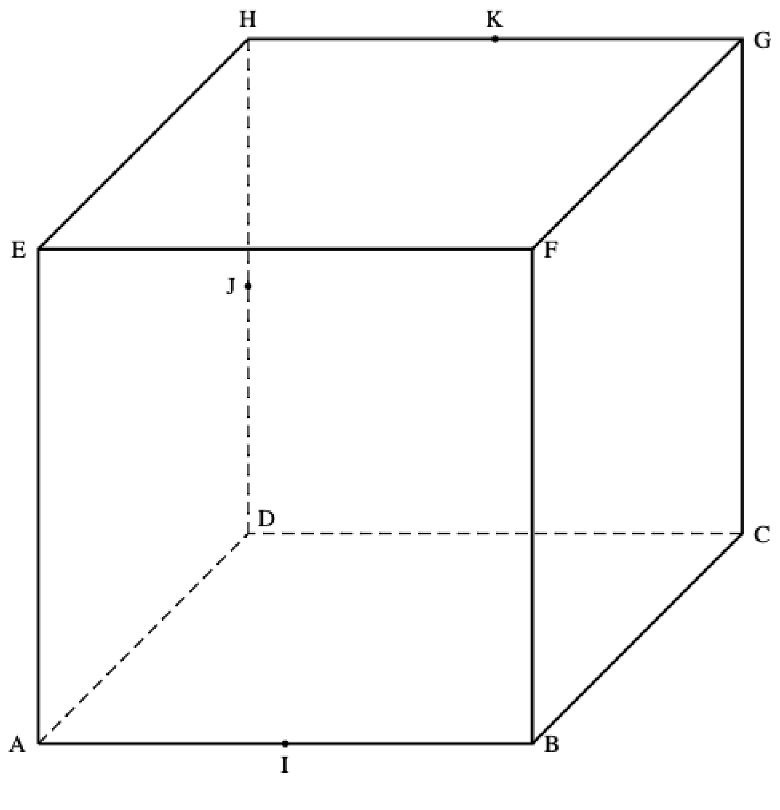
ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB] , [HD] et [HG].
On se place dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).

1) Déterminer les coordonnées des points B , C , D , E , I , J et K.

2) a) Donner un critère pour qu'une droite soit parallèle à un plan.

   b) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) Sur le dessin page suivante, construire la section du cube ABCDEFGH avec le plan (IJK).
   On laissera les traits de construction.


H
K
G
E
F
J
D
C
A
I
B

Exercice 4: *(9,5 points)*

Soit la fonction f définie sur $I =]-2 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$

1) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

2) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$.

3) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]-2 ; +\infty[$.

4) Démonter que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2 ; +\infty[$ puis montrer que $-1{,}5 < \alpha < 0$.

Exercice 5: *(6 points)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 1,5 points. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. ***Entourer la bonne réponse sur le sujet.***

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

on considère les points $A(1 ; 0 ; 2)$; $B(2 ; 1 ; 0)$; $C(0 ; 1 ; 2)$

et la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t \end{cases}$

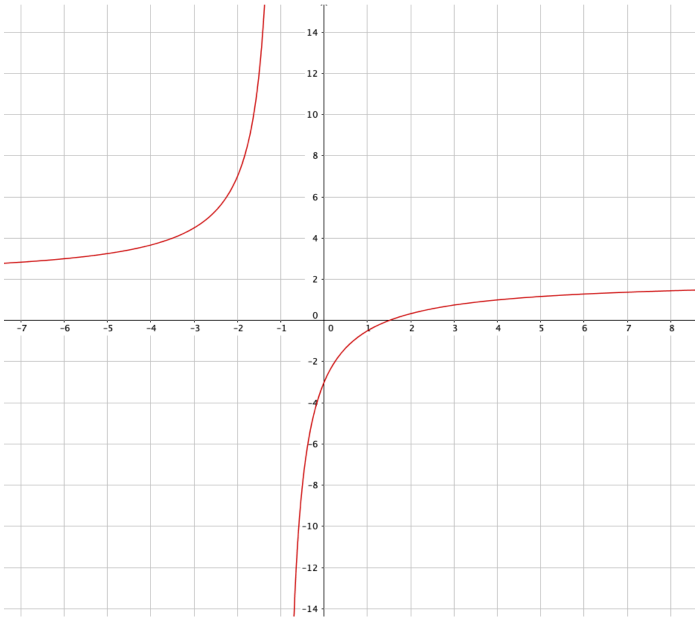
Question	A	B	C	D
Quel point appartient à la droite Δ ?	$M(-3 ; -4 ; 2)$	$N(-5 ; -5 ; 1)$	$P(-3 ; -4 ; 6)$	$Q(2 ; 1 ; -1)$
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées	$(3 ; 1 ; 2)$	$(1{,}5 ; 0{,}5 ; 1)$	$(-1 ; -1 ; 2)$	$(1 ; 1 ; -2)$
t est un réel Une représentation paramétrique de la droite (AB) est	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$
On considère le point D défini par $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$	Les points A, B, C et D sont alignés.	$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.	D a pour coordonnées $(3 ; -1 ; -1)$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

TSpé CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°4 /40 (1,5 points de bonus) (2h)

Pour ce devoir, les élèves ayant préparé les fiches de synthèse demandées auront le droit de s'en servir.
Ceux qui n'ont pas préparé ces fiches travailleront sans document.
La calculette en mode examen est autorisée.

Exercice 1: *(8 points)*

Voici la courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$.



1) Lire sur le graphique les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$ et en -1 à droite et à gauche.

On lit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

2) La fonction représentée est la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

Déterminer par le calcul les limites lues sur le graphique.

Vers l'infini, les fracations rationnelles ont la même limite que celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}2=2 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}2=2$$

$\lim\limits_{x\to-1+} 2x-3=-1$ et $\lim\limits_{x\to-1+} x+1=0^+$ car $x>-1 \Leftrightarrow x+1>0$

donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-1+}\dfrac{2x-3}{x+1}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1-} 2x-3=-1$ et $\lim\limits_{x\to-1-} x+1=0^+$ car $x<-1 \Leftrightarrow x+1<0$

donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-1-}\dfrac{2x-3}{x+1}=+\infty$

3) Etudier la convexité de la fonction f.

f est dérivable sur D_f comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$f = \frac{u}{v}$ d'où $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= 2x-3 \\ v(x) &= x+1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - 1(2x-3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2} = 5(x-1)^{-2}$, donc $f''(x) = 5 \times -2(x+1)^{-3} \times 1 = -\dfrac{10}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de -10		-		-	
signe de $(x+1)^3$		-	0	+	
signe de $f''(x)$		+	||	-	

$f''(x) > 0$ sur $]-\infty;-1[$, f est donc convexe sur $]-\infty;-1[$
$f''(x) < 0$ sur $]-1;+\infty[$, f est donc concave sur $]-1;+\infty[$

4) La courbe de f admet-elle un ou des points d'inflexion ? Si oui, lesquels ?
La dérivée seconde ne s'annulant pas, il n'y a pas de point d'inflexion.

Exercice 2: *(8,5 points)*

Déterminer les limites suivantes, en justifiant avec soin :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + 2x^2 + 3x - 2)$

Vers l'infini, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x^2+3x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3\right)=+\infty$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2}$

Vers l'infini, les fracations rationnelles ont la même limite que celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty.$$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - 3}{(x - 1)^2}$

Le quotient est défini pour $x \neq 1$.

on utilise l'écriture $\dfrac{e^x-3}{(x-1)^2} = (e^x - 3) \times \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1} e^x-3 = e-3 < 0 \\ \lim\limits_{x\to1} (x-1)^2 = 0^+ \quad \text{Par inverse } \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit} \lim_{x\to1} \frac{e^x-3}{(x-1)^2} = -\infty$$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{3x + 2}{x - 4}}$

Vers l'infini, les fractions rationnelles ont la même limite que celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré.

Ici $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{x-4} = 3 \\ \lim\limits_{t\to3} \sqrt{t} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \quad \text{par composée} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3x+2}{x-4}} = \sqrt{3}$$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x \sin(x))$

Pour tout réel x on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, en multipliant par x dont on peut supposer qu'il est positif. (On calcule ici une limite en $+\infty$.)

Donc $-x \leq x \sin x \leq x$

Puis en ajoutant x^2, il vient : $x^2 - x \leq x^2 + x\sin x \leq x^2 + x$

On a donc si $x \geq 0$, $f(x) \geq x^2 - x$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, d'après le théorème de minoration, on conclut $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + x\sin(x)\right) = +\infty$.

Exercice 3 : *(9,5 points)*

ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB] , [HD] et [HG].
On se place dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).

1) Déterminer les coordonnées des points B , C , D , E , I , J et K.

$$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}, J\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, K\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2) a) Donner un critère pour qu'une droite soit parallèle à un plan.

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

b) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

(BD) est parallèle au plan (IJK) si et seulement si $\overrightarrow{BD}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

$\overrightarrow{BD}\,(-1\,;1\,;0)$; $\overrightarrow{IJ}\,(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IK}\,(0\,;1\,;1)$

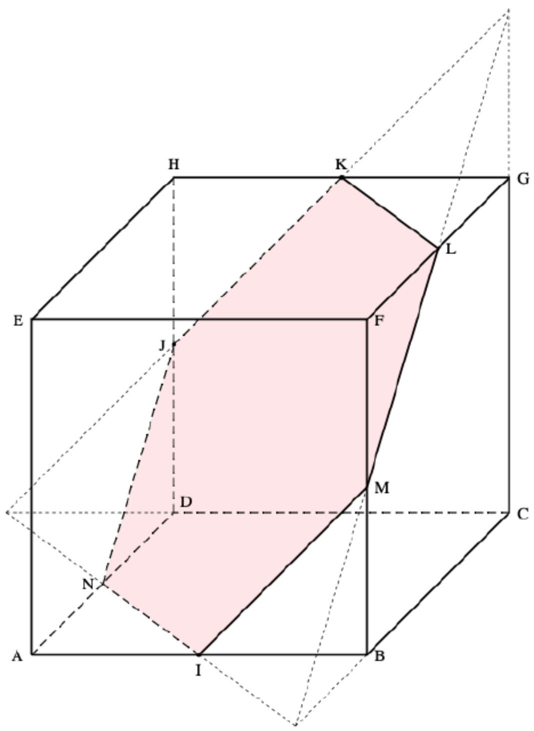
(BD) parallèle au plan (IJK) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BD} = s\,\overrightarrow{IJ} + t\,\overrightarrow{IK}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -\frac{1}{2}s + 0\,t \\ 1 = s + t \\ 0 = \frac{1}{2}s + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 - s = -1 \\ t = -\frac{1}{2}s = -1 \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK}$
donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) Sur le dessin page suivante, construire la section du cube ABCDEFGH avec le plan (IJK).
On laissera les traits de construction.



Exercice 4: *(9,5 points)*

Soit la fonction f définie sur $I =]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$

1) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

- En $+\infty$: Vers l'infini, les fractions rationnelles ont la même limite que celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré.
  Ici $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- En -2^+ : on étudie le signe du dénominateur :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $(x+2)$		-	0	+	

on utilise l'écriture $\dfrac{x^3}{x+2} = x^3 \times \dfrac{1}{x+2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^+} x^3 = -8 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} (x+2) = 0^+ \quad \text{Par inverse } \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^3}{x+2} = -\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty}$$

2) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$.

f est dérivable sur $]-2;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans : $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ v(x) = x+2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x+2) - 1 \times x^3}{(x+2)^2} \\ &= \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} \\ &== \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

3) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$.

On étudie le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
signe de $(2x^2)$		+		+		+	0	+	
signe de $x+3$		-	0	+		+		+	
signe de $(x+2)^2$		+		+	0	+		+	
signe de $f'(x)$		-	0	+	‖	+	0	+	

On déduit le tableau de variations de f sur $]-2;+\infty[$:

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$+$	
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

4) Démonter que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2 ; +\infty[$ puis montrer que $-1{,}5 < \alpha < 0$.

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I =]-2;+\infty[$.
- ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $I =]-2;+\infty[$.
- ✍ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- ✍ f réalise donc une bijection de $]-2;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$

  Comme $-2 \in]-\infty;+\infty[$, l'équation $f(x) = -2$ a une racine unique α dans $]-2;+\infty[$.

- $f(0) = 0 > -2$
- $f(-1,5) = -6,75 < -2$

$$\boxed{\text{On a donc bien } -1,5 < \alpha < 0}$$

Exercice 5: (6 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 1,5 points. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. ***Entourer la bonne réponse sur le sujet.***

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

on considère les points A(1 ; 0 ; 2) ; B(2 ; 1 ; 0) ; C(0 ; 1 ; 2)

et la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t \end{cases}$

Question	A	B	C	D
Quel point appartient à la droite Δ ?	~~M(– 3 ; – 4 ; 2)~~	~~N(– 5 ; – 5 ; 1)~~	**P(– 3 ; – 4 ; 6)**	~~Q(2 ; 1 ; – 1)~~
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées	~~(3 ; 1 ; 2)~~	~~(1,5 ; 0,5 ; 1)~~	~~(– 1 ; – 1 ; 2)~~	**(1 ; 1 ; – 2)**
t est un réel Une représentation paramétrique de la droite (AB) est	$\cancel{\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}}$	$\cancel{\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}}$	$\cancel{\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}}$	$\begin{cases} \mathbf{x = 2 - t} \\ \mathbf{y = 1 - t} \\ \mathbf{z = 2t} \end{cases}$
On considère le point D défini par $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$	~~Les points A, B, C et D sont alignés.~~	**$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.**	~~D a pour coordonnées (3 ; – 1 ; – 1)~~	$\cancel{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}$

Quel point appartient à la droite Δ ?

$$Q\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \Delta \iff \begin{cases} 2 = 1 + 2t \\ 1 = -2 + t \\ -1 = 4 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 3 \\ t = 5 \end{cases}$$

Donc $Q \notin \Delta$.

$$P\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \Delta \iff \begin{cases} -3 = 1 + 2t \\ -4 = -2 + t \\ 6 = 4 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Donc $P \in \Delta$.

donc **Réponse C**.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc **Réponse D**.

t est un réel

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(AB) \iff \overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BA}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}x=2-t\\y=1-t \quad ,t\in\mathbb{R}\\z=2t\end{cases}$$

donc **Réponse D.**

On considère le point D défini par $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC} &\iff \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\\ &\iff \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}\\ &\iff \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\\ &\iff \overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AD}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et AC donc $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

donc **Réponse B**.