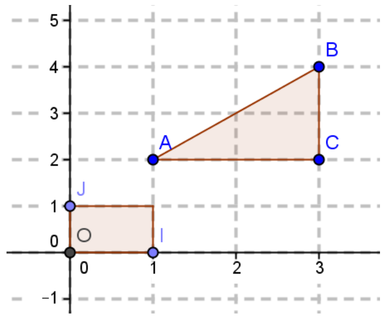
0.Avant de commencer p 310

I. Intégrale d'une fonction continue et positive.

1/ Unité d'aire.

Dans un repère orthogonal (O, I, J) l'unité d'aire noté UA est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ.

Ainsi l'aire du triangle ABC est ………UA.



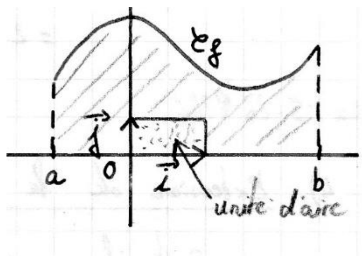
Remarque:

Si OI= 2cm et OJ = 1cm, alors 1ua = …….cm² et dans ce cas,

L'aire du triangle ABC est ……….. UA = ………… cm².

2/ Définition

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a; b]$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** et on note $\int_a^b f(x)dx$

le nombre réel représentant **l'aire du *domaine* hachuré** en unité d'aire.

(ensemble des points $M(x; y)$ tel que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$)

Remarque:

x est une variable muette ainsi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$

3/ Propriétés immédiates:

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a; b]$

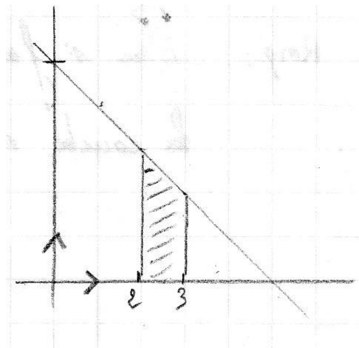
- $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Additivité des aires (**Relation de Chasles**)
  Pour tout réel c tel que $\leq c \leq b$, $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Exemples :

1) Calculer: $\int_2^3 (5-x)\ dx$

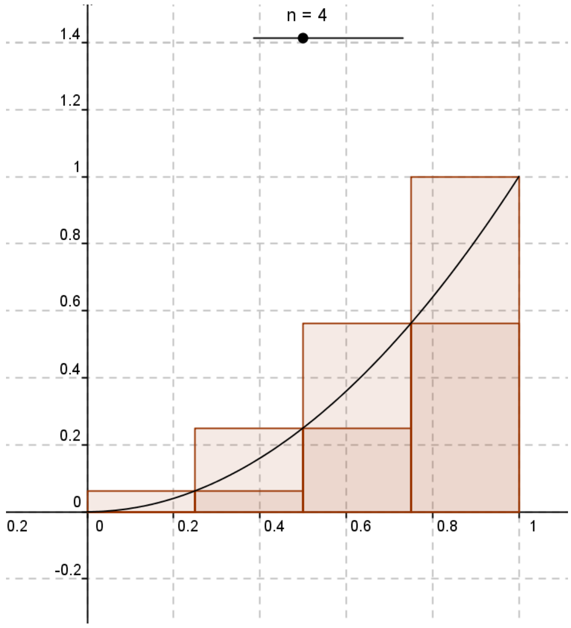
On a : $\int_2^3 (5-x)\ dx =$………………

=…………….



2) **Exemple de calcul approché d'une aire :** On considère la fonction carré sur [0 ; 1]

- en partageant en 4 intervalles de même amplitude l'intervalle [0 ; 1], on encadre $\int_0^1 x^2\ dx$ par la somme des aires des 4 « petits rectangles » et la somme des 4 « grands rectangles »



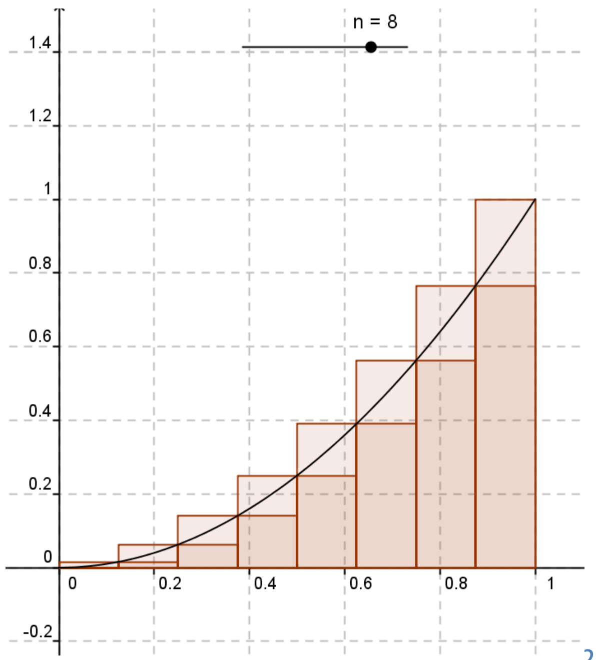
On a :

$S_1 =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … ..

$S_2 =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … ..

Donc … … … . . $\leq A = \int_0^1 x^2\, dx \ \leq \cdots$ … … … … … …

- en partageant en 8 intervalles de même amplitude l'intervalle [0 ; 1], on encadre $\int_0^1 x^2\ dx$ par la somme des aires des 8 « petits rectangles » et la somme des 8 « grands rectangles »



On a :

$S_1 =$ … ..

$S_2 =$ … ..

Donc … … … $\leq A = \int_0^1 x^2\, dx \ \leq \cdots$ … … ….

Théorème fondamental

La fonction F_a définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : **Cas où f est continue, positive et croissante sur $[a; b]$ (Admis pour les autres cas.) Activité B p 313**

Objectif Démontrer que, dans le cas où f est continue et positive sur $[a ; b]$, la fonction F_a, définie sur $[a ; b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, est dérivable sur $[a ; b]$ et que $F_a' = f$.

Soient a, b et x_0 trois réels tels que $a < b$ et $x_0 \in [a ; b]$.

On considère une fonction f continue et positive sur $[a ; b]$ et on définit la fonction F_a sur $[a ; b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. On suppose, sans perte de généralité, que f est croissante sur $[a ; b]$.

1 **a)** Pour tout réel $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$, interpréter graphiquement $F_a(x_0 + h)$ et $F_a(x_0)$.

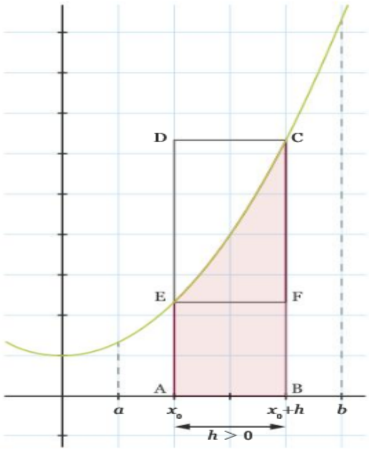
b) En déduire une interprétation graphique de $F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)$.

c) En utilisant les rectangles ABCD et ABFE, justifier que $hf(x_0) \leqslant F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leqslant hf(x_0 + h)$, puis en déduire un encadrement de $\frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h}$.

2 Recommencer la question précédente avec $h < 0$ tel que $x_0 + h > a$. On fera notamment attention au sens de la double inégalité.

3 Quel argument permet de justifier que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$?

Bilan Déduire des questions précédentes que F_a est dérivable sur $[a ; b]$ et que $F_a' = f$.



……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Propriété :

Soient F et f deux fonctions telles que F est une primitive de f sur [a ; b], on a : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Démonstration:

……
……
……
……

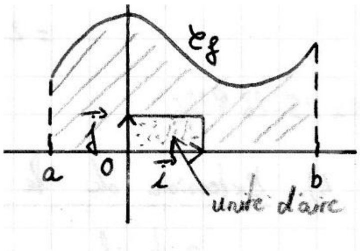
II. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1. Intégrales d'une fonction positive

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. L'aire du *domaine* hachuré en unité d'aire est:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Démonstration:

La fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est ……………………………..

Donc ………………………………………………………………………………….

Or $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ d'où en reportant dans (1), … … … … … … … … … … … … … … … ..

Ainsi $\int_a^b f(x)dx = \cdots$ …

Exemple :

La fonction carré étant positive sur $[0;1]$, l'aire A= $\int_0^1 x^2dx = [\quad]_0^1 = \cdots$ … … … … … … … .

2. Extension :définition

Soit f une fonction continue (de signe quelconque) sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Soit a et b deux réels de I. On définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on détermine d'abord une primitive F de f sur I, et on écrit:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3. Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I et λ un réel.

a/ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Démonstration: $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = \cdots$ ….

b/ Relation de Chasles: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

Démonstration: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \cdots$ … … … … … … … … … … … … … … … … … . . … … … … …

c/ Linéarité de l'intégrale:

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ **et** $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Démonstration: Une primitive de $f + g$ est $F + G$ d'où

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \cdots$ …

Même méthode pour le 2ième résultat.

d/ Positivité ($a \leq b$)

Si f est positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ *Démonstration: intégrale=aire*

Si f est négative sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Démonstration: $\int_a^b f(x)dx = \cdots$ …

……………………………………………………………………………………………….

e/ Ordre: ($a \leq b$)

Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration: Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $g - f \geq 0$ sur $[a;b]$,

D'où ….

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………….

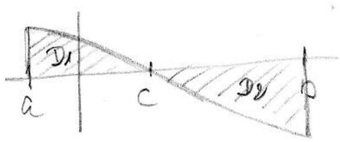
4. <u>Intégrale et aire</u>.

a/ Dans une repère orthogonal, on note D le domaine compris entre la courbe C représentant une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = a$ et $x = b$ avec $\boldsymbol{a \leq b}$

Cas d'une fonction continue et **positive** sur $[a; b]$: Aire D= $\int_a^b f(x)dx\ ua$

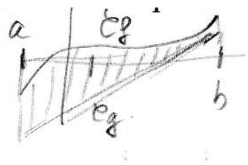
Cas d'une fonction continue et **négative** sur $[a; b]$: Aire D= $-\int_a^b f(x)dx\ ua$

Cas d'une fonction continue et de **signe quelconque** sur $[a; b]$:



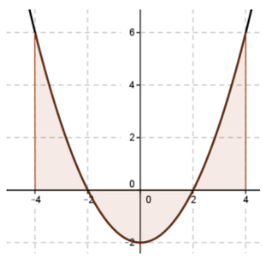
Aire D= $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\ \ ua$

<u>Propriété:</u> Aire entre deux courbes



Si sur un intervalle $[a; b]$, f et g sont continue et $f \leq g$ alors l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b g(x) - f(x)dx\ ua$

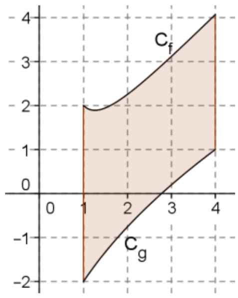
<u>Exercice 1:</u> La courbe ci-contre représente la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$



Résoudre l'équation $f(x) = 0$

Calculer l'aire A du domaine colorié:

Exercice 2:



1/ Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x\sqrt{x}$. Calculer $h'(x)$.

2/ Les courbes ci-contre représentent les fonctions

f et g définie sur $[1; 4]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ et $g(x) = 3\sqrt{x} - 5$

Calculer l'aire A du domaine colorié.

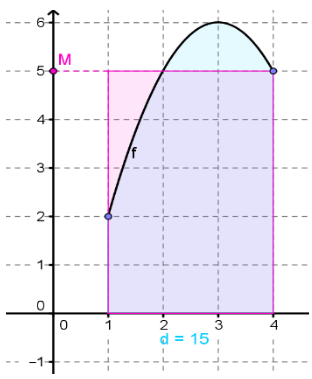
b/ Valeur moyenne

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ avec $(a \neq b)$ est le nombre réel défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Remarque: Avec la calculatrice: pour calculer $\int_1^0 x^2 dx$, Math→9.fnInt (x^2, x, 1, 0)

Exercice 3: Soit f la fonction représentée ci-contre et définie par :



$$f(x) = -(x-3)^2 + 6$$

a/ Interpréter géométriquement $\int_1^4 f(x)dx$

b/ Déterminer la valeur moyenne μ de f sur $[1; 4]$.

c/ Interpréter géométriquement μ

III. Intégration par parties

Propriété : intégration par partie

On considère deux fonctions u et v telles que u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Alors : $$\int_a^b (u'v)(x)dx = [(uv)(x)]_a{}^b - \int_a^b (uv')(x)dx$$

Démonstration :

Par opérations de fonctions dérivables, $u \times v$ est dérivable sur [a ; b] et (u×v)'=u'×v +u×v'

Donc, pour tout réel $x \in [a;b]$, on a $(u \times v)'(x) = (u'v + uv')(x)$.

u et v sont des fonctions dérivables sur $[a;b]$ et sont continues.

Par opérations sur les fonctions continues, $(uv)', u'v, uv' et\ uv' + u'v$ sont continues sur $[a;b]$.

Elles admettent donc des primitives.

On obtient : $\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b [(u'v)(x) + (uv')(x)]dx$

Soit $[(uv)(x)]_a{}^b = \int_a^b (u'v)(x)dx + \int_a^b (uv')(x)\,dx$ par linéarité de l'intégrale

D'où $\int_a^b (u'v)(x)\,dx = [(uv)(x)]_a{}^b - \int_a^b (uv')(x)\,dx$

Exemples : Calculer $\int_{-1}^0 x\, e^x\, dx$

On définit les fonctions u et v sur [-1 ; 0] par $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \dots$

Ainsi pour tout $x \in [-1\,;0]$, on peut poser $u(x) = \cdots \quad \dots\ et\ v'^{(x)} = \cdots \dots$

u et v sont dérivables sur $[-1\,;0]$, $u'\, et\ v'$ sont continues sur $[-1\,;0]$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$\int_{-1}^0 x\, e^x\, dx =$…………………………………………………………………..