Primitives- Equations différentielles

I.Primitives d'une fonction

1) Equation différentielle

La description de nombreux phénomènes physiques peut être modélisée par une relation entre une fonction g et sa dérivée g' : rechercher une fonction g revient à résoudre une équation différentielle.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ .
On dit que la fonction **g est une solution de l'équation différentielle y' = f** sur I
si et seulement si g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, **g'(x) = f (x)**

Exemple : Soit l'équation différentielle y' = $3x^2$, pour x élément de ℝ.
La fonction g telle que g(x) = x^3 est dérivable sur ℝ et, pour tout réel x , g'(x) = $3x^2$
Donc g est une solution sur ℝ de l'équation y' = $3x^2$.

2) Définitions et propriétés

a) Primitive d'une fonction f :

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ .
Dire que ***F* est une primitive de *f* sur l'intervalle I** signifie que F est dérivable sur I et que ***F* '= *f* sur I**.

b) Propriétés :

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ et F est une primitive de f sur I.

- Les fonctions G définies sur I par G(x) = F(x) + c avec c ∈ℝ constituent l'ensemble de toutes les primitives de f sur I.
- Parmi toutes les primitives de f sur I, il en existe une seule telle que G(x_0) = y_0 avec x_0 un réel donné de l'intervalle I et y_0 un réel donné.

Démonstration :

Si G(x) = F(x) + c pour $x \in$ I alors G'(x) = F '(x) = f(x) donc G est une primitive de f sur I.

Réciproquement, si G est une primitive de f sur I alors pour tout x de I, G'(x) = f(x).
Or F est une primitive de f sur I donc F '(x) = f(x) pour tout x de I.
Donc pour tout x de I , (G – F)'(x) = 0 donc la fonction G – F est une fonction constante sur I.
Il existe donc un réel c tel que, pour tout x de I, G(x) – F(x)= c donc G(x) = F(x) + c.

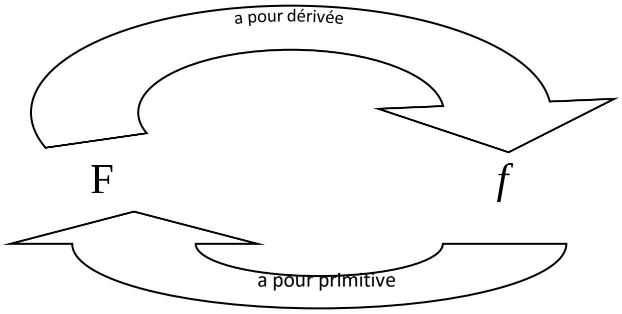
G(x_0) = y_0 peut s'écrire F(x_0) + c = y_0 donc c = y_0 – F(x_0). On a donc G(x) = F(x) + y_0 – F(x_0).
Le nombre y_0 – F(x_0) étant fixé, la fonction G est alors unique.

- Toute fonction continue sur un intervalle I de ℝ admet des primitives sur ℝ.

II .Recherche des primitives d’une fonction :

1) Fonctions usuelles :

Ce tableau s'obtient par lecture inverse du tableau des dérivées.



Fonction f	**Intervalle de définition**	**Primitive F**
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[\ 0\ ; +\infty\ [$	$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]\ 0\ ; +\infty\ [$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $]\ 0\ ; +\infty\ [$	$F(x) = \ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$

2) Primitive de la somme de deux fonctions :

Si F est une primitive de f, si G est une primitive de g alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Exemple : Soit h la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 2x$. Déterminer les primitives H de h sur $\mathbb{R}$.

$h(x) = f(x) + g(x)$ avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$

$H(x) = F(x) + G(x)$ avec $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ et $G(x) = x^2 + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C, C \in \mathbb{R}}$.

3) Primitive du produit d'une fonction par un réel :

Si F est une primitive de f sur I alors k F est une primitive de k f sur I avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple : Trouver les primitives de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9\,x^5$.

$g(x) = 9 \times f(x)$ avec $f(x) = x^5$ $\quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

$G(x) = 9 \times F(x) = 9 \times (\frac{1}{6}x^6 + C_1) = \frac{3}{2}x^6 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

4) Primitive d'un produit de la forme $u' \times u^n$ avec u une fonction dérivable non nulle et $n \in \mathbb{Z}$:

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, si n est un nombre naturel,

  alors les primitives de $\mathbf{u' \times u^n}$ sont données par $\mathbf{\frac{1}{n+1} \times u^{n+1} + C, C \in \mathbb{R}}$ **.**

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, si n est un nombre naturel, $\mathbf{n \neq 1}$**,**

  alors les primitives de $\mathbf{\frac{u'}{u^n}}$ sont données par $\mathbf{\frac{-1}{(n-1) \times u^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}}$ **.**

  En particulier, si n = 2, les primitives de $\mathbf{\frac{u'}{u^2}}$ sont $\mathbf{-\frac{1}{u} + C}$ **, C** $\mathbf{\in \mathbb{R}}$ **.**

Exemples :

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(x^2 + 1)^2$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f se présente comme un produit de deux fonctions.

Posons $u(x) = x^2 + 1$ alors $u'(x) = 2x$. On a alors $f(x) = u'(x) \times u^2(x)$.

Donc $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. $\quad \boldsymbol{F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C, \; C \in \mathbb{R}}$ **.**

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{6x^2}{(2x^3 - 4)^5}$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f se présente comme un quotient de deux fonctions.

Posons $u(x) = 2x^3 - 4$ alors $u'(x) = 6x^2$. On a alors $f(x) = \frac{u'(x)}{u^5(x)}$.

Donc $F(x) = \frac{-1}{4\,u^4(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$. $\quad \boldsymbol{F(x) = \frac{-1}{4\,(2x^3 - 4)^4} + C, \; C \in \mathbb{R}}$ **.**

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \times (\sin x)^7$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f se présente comme un produit de deux fonctions.
Posons $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$. On a alors $f(x) = u'(x) \times u^7(x)$.
Donc $F(x) = \frac{1}{8} u^8(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{8}(\sin x)^8 + C, \ C \in \mathbb{R}}$.

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^4}$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.
On remarque que f se présente comme un quotient de deux fonctions.
Posons $u(x) = \cos x$ alors $u'(x) = -\sin x$. On a alors $f(x) = -\frac{u'(x)}{u^4(x)}$.
Donc $F(x) = -\frac{-1}{3u^3(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$. $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{3(\cos x)^3} + C, \ C \in \mathbb{R}}$.

<u>5) Tableau récapitulatif :</u>

On suppose que f, g, h et u sont des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction f	**Primitive F**
$f(x) = a \times g(x) + b \times h(x)$ avec a,b réels	$F(x) = a\times G(x) + b \times H(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times u^n(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u^n(x)}$ avec $u(x) \neq 0$ et n entier, $n \geq 2$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) \neq 0$	$F(x) = \ln(\lvert u(x)\rvert) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) > 0$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$	$F(x) = \sin(u(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times \sin(u(x))$	$F(x) = -\cos(u(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$

<u>6) Les méthodes pour rechercher une primitive :</u>

1) *Si $n \in \mathbb{N}$, pour obtenir une primitive de $f(x) = x^n$, on augmente l'exposant de 1 et on divise par $(n + 1)$.*

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x^8$ puis déterminer la primitive de f telle que $F(1) = 3$.

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{9}x^9 + C, \ C \in \mathbb{R}}$.

Pour déterminer une primitive particulière, il faut calculer la valeur de la constante.

$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \times 1^9 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 - \frac{1}{9} = \frac{26}{9}$

La primitive cherchée est donc $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{9}x^9 + \frac{26}{9}}$.

2) *Pour un produit d'une fonction par un réel , on obtient une primitive en multipliant par le réel une primitive de la fonction .*

Déterminer les primitives de $f(x) = 4x^5$ et $g(x) = -12x^7$.

$F(x) = 4 \times \frac{1}{6}x^6 + C = \frac{2}{3}x^6 + C$, $C \in \mathbb{R}$. $G(x) = -12 \times \frac{1}{8}x^8 + C = -\frac{3}{2}x^8 + C$, $C \in \mathbb{R}$

3)*Pour une somme de fonctions , on obtient une primitive en ajoutant des primitives de chacune des fonctions.*

Déterminer les primitives de $h(x) = 4x^5 - 12x + 3$

$H(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^8 + 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

4) *Si* $f(x) = \frac{a}{x^2}$ *, on peut écrire* $f(x) = a \times \frac{1}{x^2}$ *. Les primitives sont alors* $F(x) = a \times \left(-\frac{1}{x}\right) + C$ *,* $C \in \mathbb{R}$ *.*

Déterminer les primitives de $h(x) = 2x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis déterminer la primitive H de h telle que $H(1) = 0$.

$H(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + C = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

$H(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3 - \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$.

La primitive de h qui s'annule pour $x = 1$ est $\mathbf{H(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{x} - \frac{11}{3}}$.

5) *Si* $f(x) = \frac{u'}{u^2}$ *alors* $F(x) = -\frac{1}{u} + C$, $C \in \mathbb{R}$

Déterminer les primitives de $h(x) = \frac{8}{(4x-3)^2}$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

Posons $u(x) = 4x - 3$ alors $u'(x) = 4$ et $h(x) = 2 \times \frac{4}{(4x-3)^2} = 2 \times \frac{u'}{u^2}$

$H(x) = 2 \times \frac{-1}{u} + C = 2 \times \frac{-1}{4x-3} + C = \frac{-2}{4x-3} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

6) *Lorsque l'on cherche les primitives d'un produit , on peut chercher à faire apparaître la forme* $u' \times u^n$

Déterminer les primitives de $f(x) = -8x(x^2-5)^4$ sur $\mathbb{R}$ puis celle qui s'annule pour $x = -2$.

f s'écrit sous la forme d'un produit . Posons $u(x) = x^2 - 5$ alors $u'(x) = 2x$.

$f(x) = -4 \times u'(x) \times u^4(x)$. Donc $F(x) = -4 \times \frac{1}{5} \times u^5(x) + C = -\frac{4}{5}(x^2-5)^5 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

$F(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}(-7)^5 + C = 0 \Leftrightarrow \frac{67\,228}{5} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{67\,228}{5} = -13\,445{,}6$

La primitive de f s'annulant pour $x = -2$ est $F(x) = -\frac{4}{5}(x^2-5)^5 - 13\,445{,}6$.

7) *Lorsque l'on cherche les primitives d'une fonction contenant une racine carrée, on peut chercher à faire apparaître la forme* $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. *Les primitives sont alors de la forme* $2\sqrt{u} + C$.

Déterminer les primitives de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $u(x) = x^2 + 4$ alors $u'(x) = 2x$ et $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

$F(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} + C = \sqrt{x^2+4} + C$.

8) *Lorsque l'on cherche les primitives d'une fonction contenant des exponentielles , on peut chercher à faire apparaître la forme* $u'\,e^{u}$. *Les primitives sont alors de la forme* e^{u}.

Déterminer les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{4} x\, e^{7x^2-3}$

Posons $u(x) = 7x^2 - 3$ alors $u'(x) = 14x$ et $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{14} \times 14x \times e^{7x^2-3} = \dfrac{1}{56} \times u'(x) \times e^{u(x)}$

Donc $F(x) = \dfrac{1}{56} \times e^{7x^2-3} + C$.

9) *Si* $f(x) = \dfrac{u'}{u}$ *alors* $F(x) = \ln|u(x)| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Déterminer les primitives de $h(x) = \dfrac{8x}{3x^2+7}$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $u(x) = 3x^2 + 7$ $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 6x$ donc $h(x) = 8 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{6x}{3x^2+7} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Donc $H(x) = \ln|u(x)| + C$ donc $H(x) = \ln(3x^2 + 7) + C$, $C \in \mathbb{R}$

III. Equations différentielles de la forme $y' = ay$ et $y' = ay + b$

1) Equation différentielle de la forme $y' = ay$

Propriété :

Soit a un réel.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions g

$g(x) = C \times e^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration (au programme)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors $g'(x) = C \times ae^{ax} = a \times g(x)$.
Puisque $g'(x) = a\,g(x)$ pour tout réel x, g est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$

Réciproquement, soit g une solution de l'équation différentielle (E): $y' = ay$
et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-ax} \times g(x)$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -a\,e^{-ax} \times g(x) + e^{-ax} \times g'(x)$
Puisque g est solution de (E), $g'(x) = a \times g(x)$
et donc,pour tout réel x, $h'(x) = -a\,e^{-ax} \times g(x) + e^{-ax} \times g'(x) = -a\,e^{-ax} \times g(x) + e^{-ax} \times a \times g(x) = 0$.
Donc, pour tout réel x, $h'(x) = 0$.
La fonction h est donc constante, soit $e^{-ax} \times g(x) = C$
Puisque e^{-ax} est différent de 0 pour tout réel x, on obtient : $g(x) = \dfrac{C}{e^{-ax}} = C\,e^{ax}$

2) Equations différentielles du type $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

Propriété :

Soit a et b des réels, a non nul.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions g telles que $g(x) = f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation $y' = ay$
et f_0 est la fonction constante, solution particulière de (E).
Donc les solutions de (E) $y' = ay + b$ sont les fonctions g telles que $g(x) = C\,e^{ax} + f_0(x)$
avec f_0 la fonction constante, solution particulière de (E).

Exemple :

L'équation différentielle $y' = 2y + 6$ admet pour solution particulière la fonction f_0 telle que $f_0(x) = -3$
En effet, $f_0'(x) = 0$ et $2 f_0(x) + 6 = 0$. Donc les solutions de l'équation sont les fonctions g telles que $g(x) = Ce^{2x} - 3$, où C est une constante réelle.

Propriété :

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Toute solution dans I de l'équation différentielle (E) $y' = ay + f$ est la somme d'une solution quelconque de $y' = ay$ et d'une solution particulière de l'équation (E).
Donc les solutions de (E) $y' = ay + f$ sont les fonctions g telles que $g(x) = C\,e^{ax} + h(x)$
avec h une fonction solution particulière de (E).

Exemple :

L'équation différentielle $y' = 2y + e^x$ admet pour solution particulière la fonction h telle que $h(x) = -e^x$.
En effet, $h'(x) = -e^x$ et $2h(x) + e^x = -e^x = h'(x)$. Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions g telles que $g(x) = Ce^{2x} - e^x$, où C est une constante réelle.