Chapitre 2. Les modèles démographiques

Mots-clés
Variation absolue ; variation relative ; taux de variation ; suite géométrique ; suite arithmétique ; modèle linéaire ; modèle exponentiel.

1. Quelques rappels de seconde sur les évolutions

a. Coefficients multiplicateurs :

● Augmenter une valeur de t % revient à la multiplier par : $1+\frac{t}{100}$.

● Diminuer une valeur de t % revient à la multiplier par : $1-\frac{t}{100}$.

● $1+\frac{t}{100}$ et $1-\frac{t}{100}$ sont appelés **coefficients multiplicateurs**.

Application 1 :
Compléter le tableau suivant

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
Augmentation de 30 %	
Diminution de 20 %	
	1,2
	0,97
Augmentation de 2 %	
Diminution de 0,5 %	

b. Variation absolue/ Variation relative

On considère une grandeur qui évolue d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f:

- $V_f - V_i$ s'appelle la **variation absolue**
- $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$ s'appelle la **variation relative** ou **taux de variation** ou encore **taux d'évolution**.

Remarque :
Si $t > 0$, l'évolution est une augmentation et si $t < 0$, l'évolution est une diminution.
Un taux de variation est souvent exprimer en pourcentage

Application 2 :
La population d'un pays est passée de 27 millions à 30,1 millions d'habitants entre 2000 et 2020. Calculer la variation absolue puis le taux de variation.

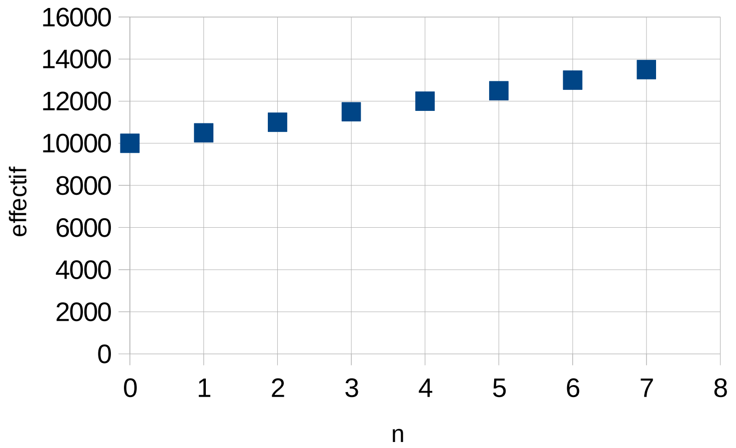
2. Variation linéaire de population

A. Etude d'un exemple

On suppose que la population d'une ville, qui est de 10 000 habitants au 1er janvier 2020, augmente régulièrement chaque année de 500 habitants. On peut alors construire un tableau traduisant l'évolution de la population dans cette ville.

Année	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	10 000	10 500	11 000	11 500	12 000	12 500	13 000	13 500

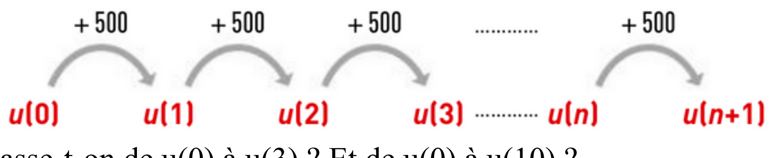
Si on note $u(n)$ la population de cette ville au 1[er] janvier de l'année de rang n, on a ainsi :
$u(0) = 10\ 000$; $u(1) = 10\ 500$; $u(2) = 11\ 000$...
La **variation absolue** de la population entre 2020 et 2021 est de 500 habitants, ce qui se traduit par :
$u(1) – u(0) = 500$.
Elle est aussi de 500 habitants entre 2021 et 2022, soit $u(2) – u(1) = 500$.
On peut construire le nuage de points associé à ce tableau de valeurs. On constate que les points semblent alignés.



Question 1 :
Déterminer l'équation de la droite *d* passant par les deux premiers points du nuage

La population de la ville étudiée ci-dessus augmente chaque année d'un nombre constant d'individus (500), c'est-à-dire que la variation absolue de la population d'une année à l'autre est constante et égale à 500.
On dit que la **croissance** est **linéaire**
On a modélisé l'évolution de cette population en associant à chaque entier naturel n l'effectif de cette population, noté *u(n)* : on définit ainsi une fonction *u* de la variable entière *n*.
Ce type de fonction est aussi appelé **une suite** On suppose que cette croissance va se poursuivre de la même façon et on veut prévoir quelle sera la population de cette ville en 2035.
Ainsi, *u(1) = u(0) + 500* ; *u(2) = u(1) + 500* ; etc.
De manière générale, pour tout entier naturel n, ***u(n+1) = u(n) + 500***

Cette égalité permettant d'obtenir *u(n+1)* en fonction de *u(n)* par l'ajout d'une constante $r = 500$ définit une **suite arithmétique** de raison *r*.
On peut schématiser ce processus de la façon suivante.



Question 2 : Comment passe-t-on de u(0) à u(3) ? Et de u(0) à u(10) ?

On a donc la formule :

Question 3 : Déterminer la population de cette ville en 2035 ?

B. Evolutions linéaires et suites arithmétiques

Lorsque la variation absolue $u(n+1) - u(n)$ de la grandeur u entre deux paliers n et $n+1$ est constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est linéaire.

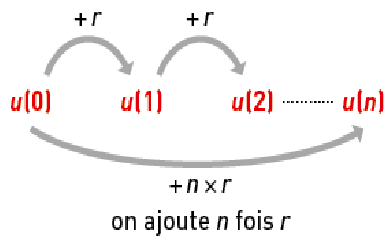
Définition

Une suite arithmétique est une suite de nombres dont chaque terme s'obtient en additionnant au précédent une constante notée *r*.

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$u(n+1) = u(n) + r$.

Le nombre *r* est appelé la **raison** de la suite *u*.



Pour tout entier naturel *n*, on a aussi :

$u(n) = u(0) + n \times r$

Ajustement par une droite de régression linéaire :

Dans la réalité, la variation absolue n'est pas tout à fait constante et les points ne sont pas tout à fait alignés. Pour établir un modèle, on peut estimer la variation absolue du modèle lorsque c'est possible, ou bien utiliser la calculatrice ou un tableur pour obtenir une équation de la droite qui ajuste le nuage de points.

C. Exercices d'applications

Exercice 1.

Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui est (sont) en rapport avec une croissance linéaire :

a. la représentation de la population en fonction du temps dans un repère est une droite.

b. la différence entre deux valeurs consécutives est (quasi) constante.

c. le taux de variation est (quasi) constant.

Exercice 2. Parmi les suites proposées, indiquer celles qui sont arithmétiques :

a. $u(n+1) = u(n) + 2$. **b.** $u(n) = 25 + 4^n$. **c.** $u(n) = 25 \times 4^n$.

d. $u(n) = 25 \times 4n$. **e.** $u(n) = 25 + 4n$ **f.** $u(n+1) = u(n) \times 2$.

g. $u(n+1) = n^2 + n + 2$.

Exercice 3. Soit une suite arithmétique u de premier terme $u(0) = 3$ et de raison $r = 24$. Donner l'expression de $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et de n puis calculer $u(15)$.

Exercice 4. Le nombre d'habitants de la population des Hauts-de-France a augmenté d'environ 9 420 par an de 1990 à 1999. En 1990, il était de 5 770 671 habitants.

1. En prenant comme année $n = 0$ l'année 1990, écrire le terme général de la suite arithmétique u décrivant la population des Hauts-de-France, en précisant son premier terme et sa raison. (On suppose que l'augmentation reste constante.)

2. Calculer alors la population de cette région en 1999.

3. En réalité, en 2008, sa population était de 5 931 091. Calculer l'estimation en 2008 et la comparer avec le nombre réel.

<u>Exercice 5 : Bordas Page 260</u>

7 Un modèle démographique linéaire pour la Roumanie

Le tableau ci-contre donne l'évolution de la population de la Roumanie, en millions d'habitants, entre 2010 et 2018.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang *n*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Population	20,25	20,15	20,06	19,98	19,91	19,82	19,7	19,59	19,47

1. Représenter le nuage de points associé à ce tableau, le rang de l'année étant placé en abscisses. On prendra 1 cm pour unité en abscisses et 10 cm en ordonnées, les graduations commençant à 18,5 en ordonnées.

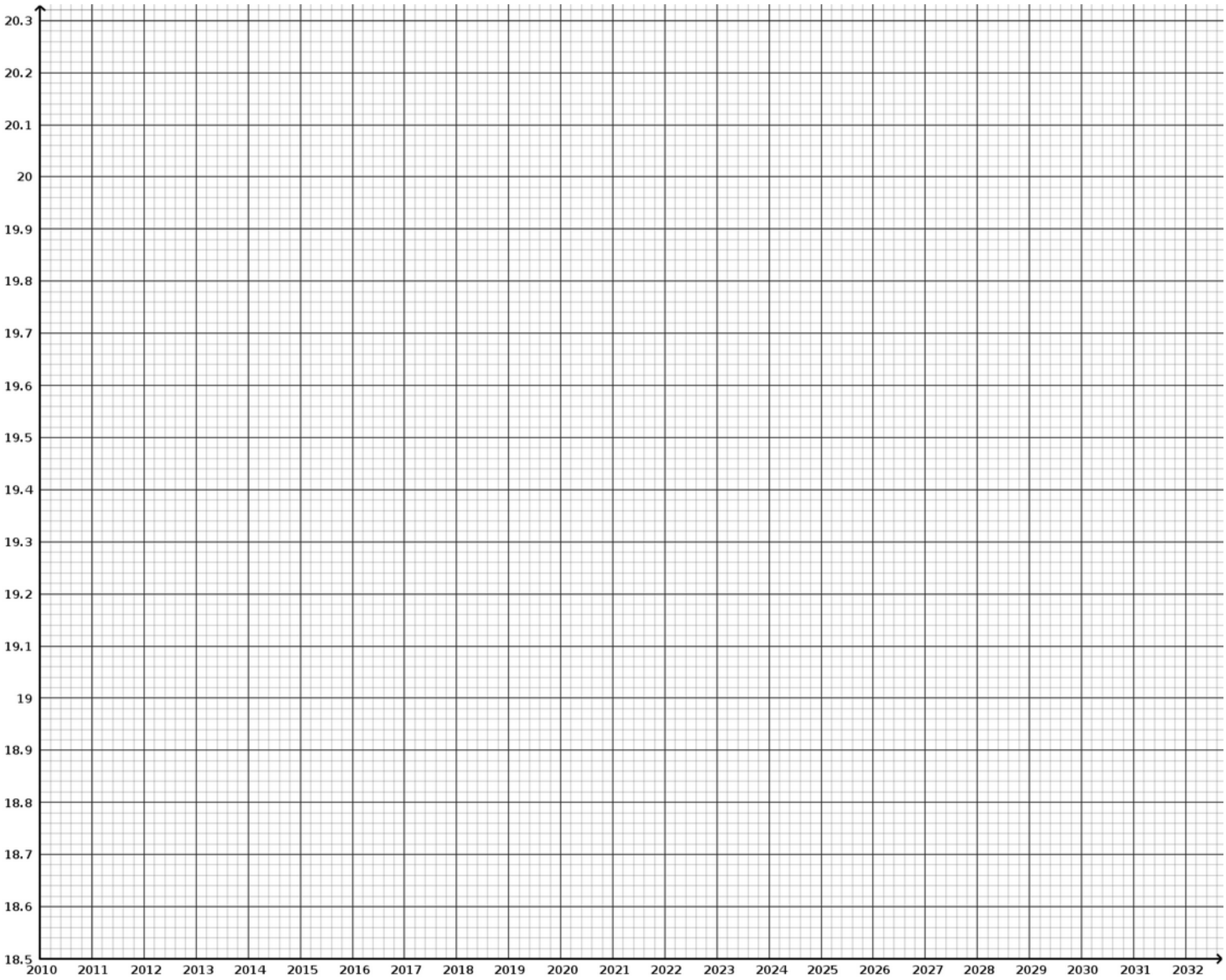
2. Justifier que la décroissance de la population de la Roumanie relève d'un modèle linéaire.

3. On note $u(n)$ le nombre d'habitants de ce pays, en millions, en l'année de rang n, selon le modèle linéaire.

a. Donner $u(0)$ et $u(8)$.

b. Exprimer $u(n)$ en fonction de n.

c. Estimer, avec ce modèle, la population de la Roumanie en 2025.



Exercice 6 : Bordas Page 261

9 Modèle démographique du Cameroun

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population du Cameroun entre 2010 et 2018, en millions d'habitants.

1. Représenter le nuage de points associé à ce tableau. On prendra 1 cm pour unité sur chaque axe, les valeurs des ordonnées débutant à 20.

2. Justifier que le modèle de croissance linéaire est adapté pour décrire l'évolution de la population du Cameroun entre 2010 et 2018.

3. Soit n un entier naturel. On note $u(n)$ la population du Cameroun, en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$, selon ce modèle démographique.

On suppose $u(0) = 20{,}3$ et $u(8) = 25{,}2$.

a. Calculer la raison de la suite u.

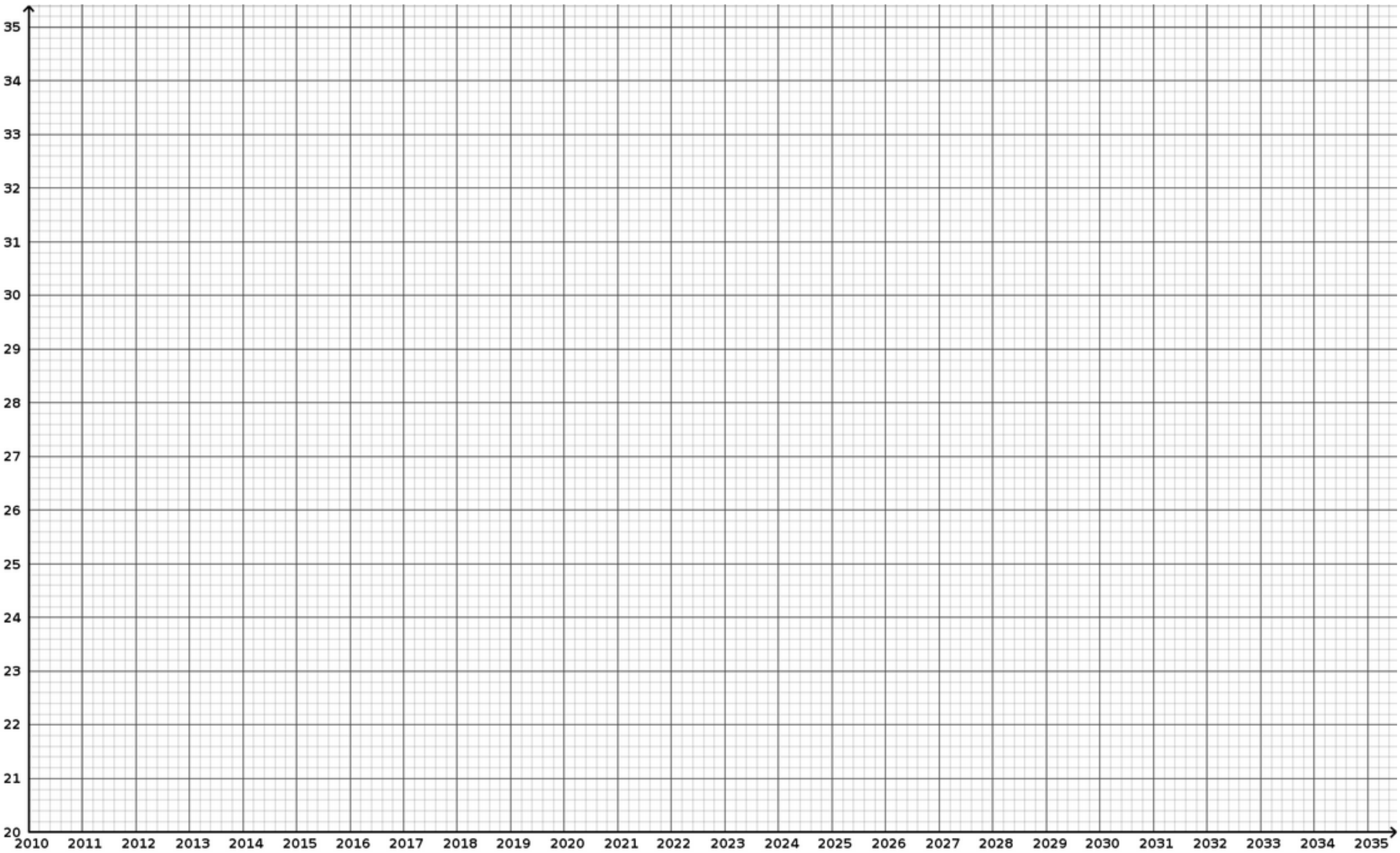
b. Exprimer $u(n)$ en fonction de n.

c. On suppose que ce modèle restera valable dans les 15 années suivantes. Utiliser ce modèle pour estimer la population du Cameroun en 2030.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Population	20,3	20,9	21,5	22,1	22,7	23,3	23,9	24,6	25,2

Coup de pouce

2. La variation est linéaire quand les points du nuage de points sont quasi alignés.



3. Modèle exponentiel de population

A. Étude d'un exemple

En 2015, la population d'une ville était de 8 000 habitants. Depuis 2015, la population augmente chaque année de 16 %. On suppose que cette croissance va se poursuivre et on veut prévoir quelle sera la population en 2030.

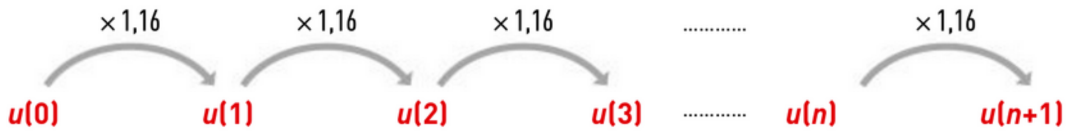
Afin de modéliser son évolution, on note $u(n)$ la population en 2015 + n. Ainsi, $u(0)$ est la population en 2015 et $u(1)$ est la population en 2016.

Question 1. quel est le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 16 % ?

Question 2. En déduire $u(1)$ et $u(2)$

Question 3. D'une manière générale, comment passe-t-on d'un terme $u(n)$ au terme suivant $u(n+1)$?

Question 4. En observant le schéma ci-dessous, comment trouve-t-on $u(3)$ à partir de $u(0)$? $u(10)$?



Question 5. D'une manière générale, comment trouve-t-on directement le terme $u(n)$?

Question 6. Donner la population de la ville en 2030

B. Suites géométriques

Lorsque le taux de variation $t = \dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$ d'une grandeur *u* est constant, on dit que la croissance (ou décroissance) est **exponentielle**.

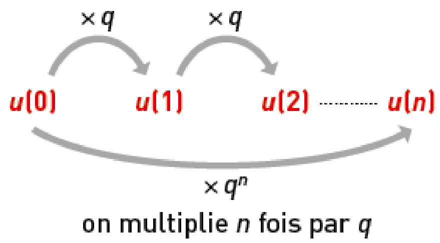
Définition

Une suite géométrique est une suite de nombres dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante ***q*.** Le nombre ***q*** est appelé la ***raison*** de la suite *u*.

Pour tout entier naturel n :

$u(n+1) = q \times u(n)$.

$u(n) = u(0) \times q^n$



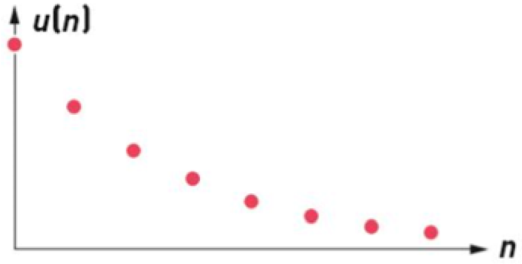
C. Utilisation d’un modèle exponentiel :

Si $t>0$**:**

croissance

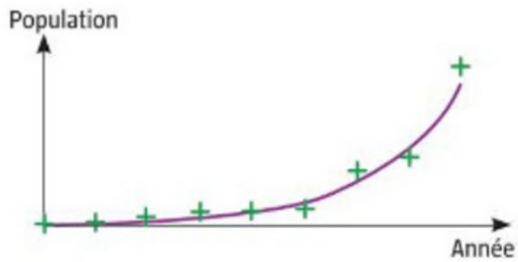
Si $t<0$**:**

décroissance



Application possible à une population si :

- **Taux de variation** presque **constant**.
- L’évolution de la population peut être ajustée par **une fonction exponentielle**.



$y = a \times b^x$

ou

$y = a \times e^{cx}$ avec $e^c = b$

D. Exercices

Exercice 1.

Parmi les affirrmations suivantes, indiquer celle qui est en rapport avec une croissance exponentielle

a.la représentation de la population en fonction du temps dans un repère est une droite.

b.la différence entre deux valeurs consécutives est (quasi) constante.

c.le taux de variation est (quasi) constant.

Exercice 2.

Soit une suite géométrique u de premier terme $u(0) = 3$ et de raison $q = 1,12$.

a. Donner l’expression de $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et de n.

b. Calculer $u(12)$. On arrondira le résultat à 0,01 près

Exercice 3.

Prévoir l’effectif d’une population La population d’une ville passe de 20 000 habitants à 21 000 habitants entre 2020 et 2021.

1. Quelle est la variation absolue de cette population sur l’année ?

2. Calculer le taux de variation de cette population sur l’année.

3. On fait l’hypothèse d’un modèle linaire pour l’évolution de cette population. Quelle sera la population de cette ville en 2030 ?

4. On fait l’hypothèse d’un modèle exponentiel pour l’évolution de cette population. Quelle sera la population de cette ville en 2030 ?

Exercice 4. Population du Mali

Le tableau ci-dessous présente les effectifs de la population du Mali entre 2010 et 2018.

Année	Effectifs	Variations (en %)
2010	15 049 353	3,21
2011	15 514 591	3,09
2012	15 979 499	3
2013	16 449 864	2,94
2014	16 934 220	2,94
2015	17 438 778	2,98
2016	17 965 429	3,02
2017	18 512 394	3,04
2018	19 077 690	3,05

1. Calculer le taux de variation de la population entre 2010 et 2018.

2. Justifier que l'on peut parler de croissance exponentielle pour la population malienne.

3. On modélise les effectifs de la population par une suite géométrique. Son terme général $u(n)$ est égal au nombre d'habitants du Mali à l'année $2010 + n$.

a. Calculer la moyenne des taux de variation de 2010 à 2018. Arrondir au centième.

b. La raison de la suite est $q = 1{,}03$. Justifier ce choix.

c. Écrire $u(n)$ en fonction de n.

d. Calculer $u(8)$. Comparer le résultat avec les données du tableau.

e. À l'aide de ce modèle, prévoir le nombre d'habitants au Mali en 2025.

Exercice 5. 16 p 263 du manuel

16 L'Algérie de 1960 à 2015

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population de l'Algérie entre 1960 et 2015, en millions d'habitants.

Année	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Population	11	12,6	14,5	16,6	19,2	22,4	25,8	28,8	31	33,2	36	39,7

1. Représenter le nuage de points associé à ce tableau, le rang étant en abscisses. On prendra 1 cm pour 5 unités en abscisses et en ordonnées.

2. Justifier que l'on peut considérer que la croissance de la population de l'Algérie est exponentielle entre 1960 et 1995.

3. On décide de modéliser l'évolution de la population entre 1960 et 1995 par les 36 premiers termes d'une suite géométrique v de raison q, telle que $v(0) = 11$ et $v(35) = 28{,}8$.

a. Exprimer $v(35)$ en fonction de q.

b. Déterminer la raison q, en arrondissant à 10^{-3} près.

c. Utiliser ce modèle pour estimer, à 0,1 près, la population de l'Algérie en 2002.

4. Ce modèle est-il pertinent pour les années 2000 à 2015 ?

5. On fait l'hypothèse d'un modèle linéaire à partir de 1995.

a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage de points formé des cinq derniers points du nuage représenté à la question **1**. On arrondira les coefficients de l'équation à 0,01 près.

b. En déduire, selon ce modèle, une estimation de la population de l'Algérie en 2019.

4. Un exemple historique : Le modèle de Malthus

Thomas Robert Malthus (1766-1834) était un économiste britannique. Il a prédit que, sans frein, la population augmenterait de façon exponentielle tandis que les ressources ne croîtraient que de façon arithmétique.

Le modèle exponentiel de Malthus

Le modèle exponentiel [de Malthus] est utilisé afin de quantifier l'accroissement démographique d'une population donnée dans un environnement idéal, c'est-à-dire où les ressources sont illimitées. [...] Il est vrai qu'une petite population peut croître rapide-ment durant un certain temps si elle se situe dans un milieu favorable. Par contre, en réalité, les ressources de l'environnement des individus concernés finiront forcément par s'épuiser et il y aura conséquemment [un accroissement] de la mortalité. Ce modèle n'est donc jamais représentatif de l'accroissement démo-graphique réel

D'après Les modèles d'accroissement démographique de Malthus et de Verhulst, philectriquesciencesetenvironnement.wordpress.com

Extrait d'un ouvrage de Malthus

Voici un extrait du texte de Thomas Malthus :

« Comptons pour 11 millions la population de la Grande-Bretagne et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de 22 millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à 44 millions, mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que 33 millions d'habitants. Dans la période suivante, la population – arrivée à 88 millions – ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre [...].

La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 [...]. Le rythme d'accroissement de la population, de période en période, l'emporte donc tellement sur celui de l'augmentation des subsistances que, pour maintenir le niveau et pour que la population existante trouve toujours des aliments en quantité suffisante, il faut qu'à chaque instant une loi supérieure fasse obstacle à son extension. »

Thomas Robert Malthus, Essai sur le principe de population, 1798.

La controverse

[Les travaux de Malthus ont] déclenché dès 1798 une très vive contro-verse. Godwin, en parti-culier, estime de son de-voir de réfuter le «principe fondamental» de Malthus. [...]Comment des peuples ont-ils pu disparaître avec une telle puis-sance de peuplement? En cas de dépopulation, la contrainte des subsistances devenant moins forte, la population devrait augmenter à nouveau.La controverse s'est saisie des raisons de la rapide crois-sance démographique des États-Unis. Si la population y a pu doubler en 25 ans comme le montre Malthus, est-ce une simple conséquence de la puissance de peuplement sur un territoire où les ressources sont abondantes ou bien le résultat d'une forte immigration en provenance d'Europe, alors que le désir d'émigrer était très fort? [...] Dans [un] texte paru en 1830 [...] Malthus reste fidèle à sa vision du principe de population. Comme déjà en 1798, il dénonce les effets pervers des lois d'assistance aux pauvres qui reviennent à reconnaître «un droit de plein soutien à tout ce qui devrait naître».

Questions

1. En appliquant le raisonnement de Thomas Malthus à partir de l'année 1798, combien pouvait- on prévoir d'habitants en 1923 en Grande-Bretagne?
2. Toujours selon le raisonnement de Thomas Malthus, estimer les moyens de subsistance en Grande Bretagne en 1923. Les moyens de subsistance sont assimilés au nombre d'habitants qu'ils permettent d'entretenir.
3. Qualifier l'évolution de la population et celle des moyens de subsistance selon leshypothèses de Thomas Malthus.
4. Selon le raisonnement de Thomas Malthus, déterminer tous les 25 ans, de 1798 à 1923 :
a. le nombre d'habitants en Grande Bretagne;
b. le nombre d'habitants de Grande Bretagne dont les besoins alimentaires sont assurés;
c. le pourcentage de la population dont les besoins alimentaires sont assurés.
5. Quelle vision de l'avenir avait Malthusʅ? Quelles conclusions contestables en tire-t-ilʅ?
6. Le modèle de Malthus est-il juste sur des temps courtsʅ? sur des temps longsʅ?

A retenir pour ce chapitre :
Modéliser l'évolution d'une population ou d'une ressource permet de faire des prévisions. Mais les modèles que l'on peut élaborer ne sont pas valables à très long terme. Aujourd'hui, on prévoit que la population mondiale sera d'environ 9,7 milliards d'habitants à l'horizon 2050.

1 Le modèle linéaire

La grandeur u représente une population, une ressource…

Variation absolue constante :
$u(n+1) - u(n) = \text{constante } r$

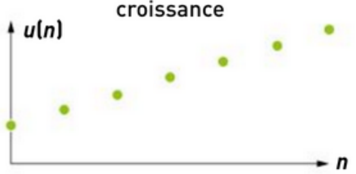
$$u(0) \xrightarrow{+r} u(1) \xrightarrow{+r} u(2) \cdots\cdots u(n)$$

$+n \times r$: on ajoute n fois r

modélisation par une suite arithmétique de raison r :
$u(n+1) = u(n) + r$
$\boxed{u(n) = u(0) + n \times r}$

Nuage de points formé de points alignés

croissance

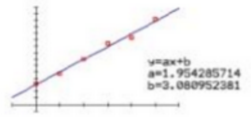


décroissance

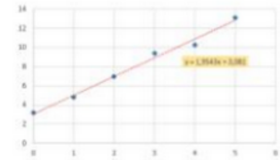
Modélisation de la réalité par un modèle linéaire

ajustement du nuage par une droite :

– avec une calculatrice



– avec un tableur



2 Le modèle exponentiel

La grandeur u représente une population, une ressource…

taux de variation constant :
$\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)} = \text{constante } t$

$$u(0) \xrightarrow{\times q} u(1) \xrightarrow{\times q} u(2) \cdots\cdots u(n)$$

$\times q^n$: on multiplie n fois par q ($q = 1 + t$)

modélisation par une suite géométrique de raison q :
$u(n+1) = q \times u(n)$
$\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$

Allure du graphique

croissance

décroissance

Modélisation de la réalité par un modèle exponentiel

$q^n = a$ équivaut à $q = a^{\frac{1}{n}}$

Temps de doublement

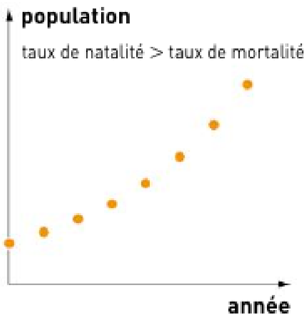
$y = 5{,}09 \times 1{,}09^n$

n	$u(n)$
0	50
1	54,5
2	59,41
3	64,75
4	70,58
5	76,93
6	83,86
7	91,40
8	99,63
9	108,59
10	118,37

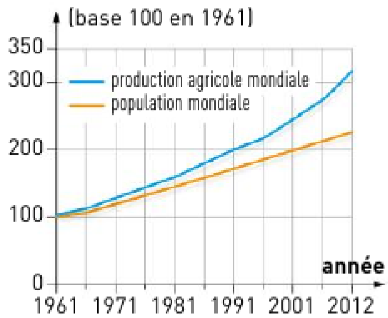
le temps de doublement ne dépend pas de $u(0)$

3 Le modèle démographique de Malthus (1798)

Modèle de Malthus



Réalité



Modèle actuel