Fiche révisions SUITES

Définition de suites

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, on demande de calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

1. $u_n = \dfrac{7n-2}{n+4}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
3. u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.
4. u_n est la somme des n premiers nombres pairs strictement positifs.
5. u_n est le nombre de diviseurs positifs de n.
6. Je place 1 000 € sur mon livret A au taux de 2,5% par an.
   u_n est la somme dont je dispose la $n^{\text{ième}}$ année.
7. u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre π.

Suites arithmétiques

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout n la suite (u_n) par : $u_n = 3n - 2$.
   Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Calculer le $9^{\text{ième}}$ terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.
3. Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -2.
   Calculer u_{15}, puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$.

Suites géométriques

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5}$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit u_n une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{81}$ et de raison -3.
   Calculer u_7, puis $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 4\ 096$.

Sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = 3n - 5$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
4. $u_n = \dfrac{3^n}{2}$.
5. $u_n = \sqrt{n^2+3}$.
6. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
7. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{array}\right.$.
8. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{array}\right.$.
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *(plus difficile)*

Majoration, minoration

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par $u_n = 5 - \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = -n^2 + 8n + 1$.
   Montrer que (u_n) est majorée par 17.
4. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

Problème 1:

On considère la suite (u_n) de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

et la relation initiale $u_0 = 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 6$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ puis $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$.

Problème 2:

Une personne loue une maison à partir du premier janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 € et le locataire s'engage à occuper la maison pendant 9 années complètes.

Les valeurs décimales seront arrondies, si nécessaire, au centime près.

1. **Contrat n°1 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer u_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer u_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer u_8.
   (d) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.
2. **Contrat n°2 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 € du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer v_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer v_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

Problème 3:

Suites et représentation graphique

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ d'une part et $v_1,\ v_2,\ v_3$ d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 5 cm, tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1,\ A_2,\ A_3$ d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ ainsi que les points $B_1,\ B_2,\ B_3$ d'abscisses respectives $v_1,\ v_2,\ v_3$.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Calculer s_0 , $s_1,\ s_2$ et s_3. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
   (b) On admet que la suite (s_n) est une suite constante égale à 2. (la démonstration n'est pas du programme de première)
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (d_n) est géométrique.
   (b) Donner l'expression de d_n en fonction de n.
5. En utilisant les questions **3.(b)** et **4.(b)**, donner l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.
6. Calculer la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

CORRECTION FICHE D'EXERCICES DE REVISION SUR LES SUITES

Définition de suites

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, on demande de calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

1. $u_n = \dfrac{7n-2}{n+4}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
3. u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.
4. u_n est la somme des n premiers nombres pairs strictement positifs.
5. u_n est le nombre de diviseurs positifs de n.
6. Je place 1 000 € sur mon livret A au taux de 2,5% par an.
   u_n est la somme dont je dispose la $n^{\text{ième}}$ année.
7. u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre π.

1. $u_1 = \dfrac{7-2}{1+4} = 1$; $u_2 = \dfrac{14-2}{2+4} = 2$; $u_3 = \dfrac{21-2}{3+4} = \dfrac{19}{7}$; $u_6 = \dfrac{42-2}{6+4} = 4$

2. $u_1 = 2\,u_0 + 3 = 4 + 3 = 7$; $u_2 = 2u_1 + 3 = 14 + 3 = 17$; $u_3 = 2u_2 + 3 = 34 + 3 = 37$
   $u_4 = 2u_3 + 3 = 74 + 3 = 77$; $u_5 = 2u_4 + 3 = 154 + 3 = 157$; $u_6 = 2u_5 + 3 = 314 + 3 = 317$

3. $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = 5$; $u_5 = 7$; $u_6 = 11$.

4. $u_1 = 2$; $u_2 = 2 + 4 = 6$; $u_3 = 2 + 4 + 6 = 12$; $u_6 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$

5. $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 2$; $u_6 = 4$

6. $u_0 = 1000$. Augmenter de 2,5% c'est multiplier par $1 + \dfrac{2,5}{100} = 1,025$.
   Donc $u_{n+1} = u_n \times 1,025$ pour tout entier naturel.
   (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,025 et de premier terme $u_0 = 1000$.
   $u_1 = 1000 \times 1,025 = 1025$; $u_2 = 1025 \times 1,025 = 1050,625$; $u_3 = 1050,625 \times 1,025 = 1076,891$.
   $u_6 = u_0 \times q^6 = 1000 \times 1,025^6 = 1159,693$.

7. $\pi \approx 3,1415926$ donc $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 1$; $u_6 = 2$.

Suites arithmétiques

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout n la suite (u_n) par : $u_n = 3n - 2$.
   Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{3}$.
   Calculer le 9ième terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.
3. Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -2.
   Calculer u_{15}, puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$.

1. **Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette différence ne dépend pas de n. Le résultat de cette différence sera la raison de la suite arithmétique (u_n) .**

   $u_n = 3n - 2$ donc $u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1$
   $u_{n+1} - u_n = 3n + 1 - 3n + 2 = 3$
   donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 3 \times 0 - 2 = -2$.

2. **Si (u_n) est arithmétique, alors $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_p + (n-p) \times r$**
   $u_0 = 5$ et $r = \frac{1}{3}$ donc le 9è terme est u_8 et $u_8 = u_0 + 8r = 5 + \frac{8}{3} = \frac{23}{3}$

   $\mathbf{S = \dfrac{1^{er}\ terme + dernier\ terme}{2} \times nombre\ termes} = \dfrac{5 + \frac{1}{3}}{2} \times 9 = 57.$

3. $v_1 = 2$; $r = 2$ donc $v_{15} = v_1 + 14r = 2 + 14 \times (-2) = -26$
   $S = v_7 + \ldots + v_{15} = \dfrac{v_7 + v_{15}}{2} \times (15 - 7 + 1) = \dfrac{v_1 + 6r - 26}{2} \times 9 = \dfrac{2 + 12 - 26}{2} \times 9 = -162$

4. $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$
   S est la somme de termes d'une suite arithmétique de raison r = 3
   (on passe d'un terme à l'autre en ajoutant 3) .
   donc $S = \dfrac{11 + 173}{2} \times$ nombre termes.
   Pour calculer le nombre de termes il faut déterminer l'indice de $u_n = 173$ sachant que $u_0 = 11$.
   $u_n = u_0 + n \times r$ donc $174 = 11 + n \times 3 \Leftrightarrow n = \dfrac{174 - 11}{2} = 54.$
   174 est donc u_{54} donc S comporte 55 termes.

   donc $S = \dfrac{11 + 173}{2} \times 55 = 5060.$

Suites géométriques

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5}$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit u_n une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{81}$ et de raison -3.
   Calculer u_7, puis $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 4\ 096$.

1. **Pour montrer qu'une suite est géométrique, on calcule u_{n+1} et on montre cherche à montrer que l'expression peut s'écrire $q \times u_n$ avec q un réel non nul. Ce réel non nul sera la raison de la suite géométrique (u_n) .**

   $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5} = \dfrac{7 \times 7^n}{5} = 7 \times \dfrac{7^n}{5} = 7 \times u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison q = 7 et de premier terme $u_0 = \dfrac{7}{5}$.

2. **Si (u_n) est géométrique, alors $u_{n+1} = u_n \times q$ et $u_n = u_p \times q^{n-p}$**

   $u_7 = u_1 \times q^6 = \dfrac{1}{81} \times (-3)^6 = 9$

   $S = 1^{er}$ terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre termes}}}{1 - q}$.

   $S = u_1 \times \dfrac{1-(-3)^7}{1-(-3)} = \dfrac{1}{81} \times \dfrac{2188}{4} = \dfrac{547}{81}$

3. S = 1 + 2 + 4 + 8 + … + 4096
   S est la somme de termes d'une suite géométrique de raison q = 2
   (on passe d'un terme à l'autre en multipliant par 2) .
   Pour calculer le nombre de termes il faut déterminer l'indice de $u_n = 4096$ sachant que $u_1 = 1$.
   $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ donc $4096 = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ or $2^{12} = 4096$ donc n = 13.
   Il y a donc 13 termes dans la somme.
   $S = 1 \times \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = 8191$

   ou **$S = \dfrac{1^{er}\text{ terme} - \text{dernier terme} \times q}{1-q}$**

   donc $S = \dfrac{1 - 4096 \times 2}{1-2} = 8191$

Sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = 3n - 5.$
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2.$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}.$
4. $u_n = \dfrac{3^n}{2}.$
5. $u_n = \sqrt{n^2+3}.$
6. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n.$
7. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}.$
8. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}.$
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$ *(plus difficile)*

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si cette différence est positive, la suite est croissante. Si elle est négative, la suite est décroissante.

1. $u_n = 3n - 5$; $u_{n+1} = 3(n+1) - 5 = 3n - 2$
   $u_{n+1} - u_n = 3n - 2 - 3n + 5 = 3$ $u_{n+1} - u_n$ est positive donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$; $u_{n+1} = -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 = -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 = -n^2 + 3n + 2$
   $u_{n+1} - u_n = -n^2 + 3n + 2 + n^2 - 5n + 2 = -2n + 4$
   Etude du signe de $-2n+4$: $-2n + 4 > 0 \Leftrightarrow -2n > -4 \Leftrightarrow n < \dfrac{-4}{-2} \Leftrightarrow n < 2$
   Donc pour $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n$ est positive ou nulle donc la suite (u_n) est croissante à partir de $n = 2$.

3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$; $u_{n+1} = \dfrac{n+1+1}{n+1+2} = \dfrac{n+2}{n+3}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 3}{(n+3)(n+2)}$
   donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$
   n étant un entier naturel, n est positif ou nul donc $n + 3$ et $n + 2$ sont des entiers strictement positifs donc la différence $u_{n+1} - u_n$ est strictement positive.
   Donc la suite (u_n) est une suite strictement croissante.

4. $u_n = \dfrac{3^n}{2}$; $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{2}$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2} - \dfrac{3^n}{2} = 3 \times \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{3^n}{2} = \dfrac{3^n}{2}(3-1) = 2 \times \dfrac{3^n}{2} = 3^n$
   3^n est un entier strictement positif quel que soit n entier naturel
   donc la suite (u_n) est strictement croissante.

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sqrt{n^2+3}$

* Signe de $U_{n+1} - U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{(n+1)^2+3} - \sqrt{n^2+3}$$
$$= \sqrt{n^2+2n+4} - \sqrt{n^2+3}$$
$$= \frac{n^2+2n+4-(n^2+3)}{\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3}}$$
$$= \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n^2+3} > 0 \\ \sqrt{n^2+2n+4} > 0\end{array}\right\}$ par somme $\sqrt{n^2+2n+4} + \sqrt{n^2+3} > 0$

donc $U_{n+1} - U_n$ sera du signe de $2n+1$

n	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$2n+1$	$+$

$2n+1 = 0$
$n = -1/2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n > 0$ donc (U_n) est strictement croissante.

6. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ donc $u_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} - 1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

Le signe de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ dépend de la parité de n.

Si n est pair, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est positif ; si n est impair $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est négatif

donc le signe de $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant donc la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.