

TSpe DM2 Facultatif

Exercice 1:

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000°C . A la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est en degré Celsius.

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C . Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser. Pour tout nombre entier naturel n , on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint.

On a donc $T_0 = 1000$ et pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,82 \times T_n + 3,6$

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$
3. Etudier la monotonie de la suite (T_n) .
4. Au bout de combien d'heures, le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ? Utilisez la calculatrice en expliquant votre raisonnement.

Exercice 2:

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que $u_1 = 4$ et calculer u_2 et u_3 .
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$
4. En déduire l'existence du rang p à partir duquel pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n > 390$
5. Compléter l'algorithme, soit en langage Python, soit en langage courant:

Code Python

```
def recherche():  
    '''renvoie l'indice du terme qui dépasse 390.'''  
    u = 1  
    n = 0  
    while .....:  
        n = ...  
        u = ...  
    return ...
```

Pseudo Code

```
Fonction recherche()  
    u ← 1  
    n ← 0  
    Tant que ..... Faire  
        | n ← ...  
        | u ← ...  
    Fin Tant que  
    Renvoyer ...
```

6. Résoudre l'inéquation $u_n > 390$ avec la calculatrice en expliquant la démarche.
7. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n
8. Démontrer la propriété conjecturée.

Exercice 3:

- 1) Soit $u(x) = -3x + 4$ et $v(x) = x^3$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Exprimer $(u \circ v)(x)$ et $(v \circ u)(x)$ pour tout réel x .

- 2) On donne $f(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Décomposer f sous la forme $u \circ v$ en précisant les fonctions u et v .

- 3) Soit $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 2x + 4$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $u \circ v$ et de $v \circ u$.

b) Calculer $(u \circ v)(-1)$ et de $(v \circ u)(-1)$ si possible.

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.