Chapitre 4

# Suites : récurrence, limites, convergence …

## I. Principe général du raisonnement par récurrence :

***1ere approche :***

C'est un raisonnement " de proche en proche " qu'on a déjà utilisé de manière intuitive pour les suites arithmétiques et géométriques (démonstration de $u_n = u_0 + n\,r$ et de $u_n = u_0 \times q^n$ ).

C'est le principe d'un château de dominos :

- si on pousse un domino, le suivant tombe, et le suivant du suivant et tous les autres
- mais il faut pousser un premier domino, sinon rien ne tombe...

**Principe :**
Pour démontrer par récurrence qu'une propriété Pn est vraie pour tout *n*, on utilise 3 étapes:

1) Initialisation :

On vérifie que la propriété est vraie au premier rang, pour $n = 0$ (ou $n = 1, 2....$) .

On a alors : $P_0$ est vraie ( ou $P_1$ , $P_2$ … ) .

2) Hérédité :

En supposant que la propriété est vraie pour un nombre $n = k$ ( hypothèse de travail $P_k$ est vraie ), on démontre qu'elle est dans ce cas vraie pour le rang k + 1.

On a alors : Si $P_k$ est vraie pour un certain k , alors $P_{k+1}$ est vraie.

3) Conclusion :

Comme la propriété est vraie pour $n = 0$, et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tout *n* .

**Exemple :**

On considère une suite géométrique de raison *q* et de premier terme $u_0$ .

On sait donc, par définition, que pour tout *n* entier naturel : $u_{n+1} = u_n \times q$.

On veut démontrer par récurrence que pour tout *n* on a alors $u_n = u_0 \times q^n$ . Cette relation est $P_n$.

1) Initialisation

Pour n = 0, $P_0$ est $u_0 \times q^0 = u_0$ ce qui est vrai donc la propriété est vraie pour $n = 0$. $P_0$ est vraie.

2) Hérédité

On suppose que, pour une certaine valeur $n = k$ , on a $u_k = u_0 \times q^k$

et on veut montrer que $u_{k+1} = u_0 \times q^{k+1}$ .

Or, par définition de la suite, $u_{k+1} = u_k \times q$ .

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient $u_{k+1} = u_k \times q = ( u_0 \times q^k ) \times q = u_0 \times q^{k+1}$ .

Si $P_k$ est vraie pour un certain k, alors $P_{k+1}$ est vraie.

3) Conclusion :

Comme la propriété est vraie pour $n = 0$, et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tout *n* .
On a donc, pour tout n entier naturel, $u_n = u_0 \times q^n$ .

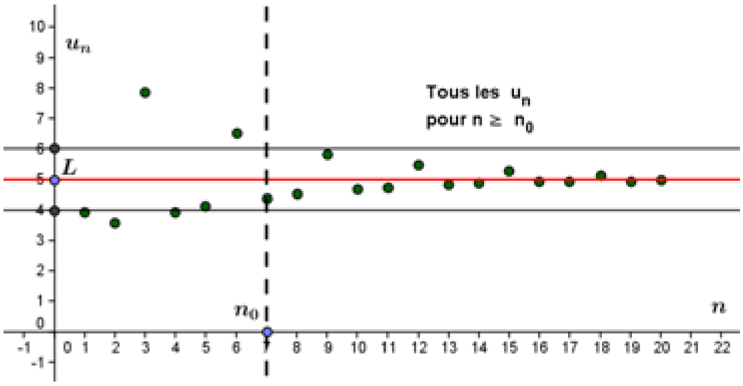
# II. Définitions des différentes limites:

## 1) Limite finie :

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert, contenant $\ell$, contient tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.
On écrira alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ou que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.

Remarques :

- La limite d'une suite ne peut s'étudier qu'en $+\infty$, car $n$ est un entier naturel.
  On écrit donc parfois $\lim u_n = \ell$.
- L'intervalle ouvert contenant $\ell$ est aussi petit qu'on veut. C'est comme si tous les points qui représentent les termes de la suite étaient contenus dans un tube à partir d'un certain rang.




- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie, celle-ci est unique.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \ell) = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

*Exemple :* $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$u_0 = 4$ ; $u_1 = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ ; $u_2 = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3$ ; $u_3 = \dfrac{11}{4} = 2{,}75$ … Cette suite semble avoir pour limite 3.

Pour justifier cette limite, on va choisir un intervalle ouvert centré sur 3, par exemple $]2{,}75 ; 3{,}25[$.
On doit alors démontrer que tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, sont dans cet intervalle.
On cherche donc un rang n tel que $2{,}75 < u_n < 3{,}25$.

$$2{,}75 < u_n < 3{,}25 \Leftrightarrow 2{,}75 < 3 + \frac{(-1)^n}{n+1} < 3{,}25 \Leftrightarrow -0{,}25 < \frac{(-1)^n}{n+1} < 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| < 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 0{,}25 \Leftrightarrow n+1 > 4 \Leftrightarrow n > 3.$$

A partir du rang 4, $u_n \in ]2{,}75 ; 3{,}25[$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite 3.

On écrira $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 3$.

Limites de référence à connaître :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

## 2) Limite infinie :

On dit que $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+ \infty$ si , pour tout nombre A positif , l'inégalité $u_n \geq A$ est vraie à partir d'un certain rang n .

L'intervalle $[ A ; + \infty [$ contient tous les termes de la suite $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ , sauf un nombre fini de termes.

On écrira alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = + \infty$ et on dira que la suite $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

*Exemple :* $u_n = 2^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

$u_n > 0$ *et* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ *donc la suite* $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

*Si* $A = 1\,000$ $u_n \geq A \Leftrightarrow 2^n \geq 1\,000 \Leftrightarrow n \geq 10$

*A partir du rang 10,tous les termes de la suite* $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ *sont supérieurs à A*

*A l'exception des 10 premiers termes, tous les autres sont dans l'intervalle* $[A;+ \infty[$.

*Donc la suite* $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ *est divergente et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = + \infty$.

De même :

On dit que $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $- \infty$ si , pour tout nombre A négatif , l'inégalité $u_n \leq A$ est vraie à partir d'un certain rang n .

L'intervalle $] - \infty ; A ]$ contient tous les termes de la suite $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ , sauf un nombre fini de termes.

On écrira alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = - \infty$ et on dira que la suite $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Limites de référence à connaître :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = + \infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} - n = \lim\limits_{n \to +\infty} - n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} - n^3 = \lim\limits_{n \to +\infty} - \sqrt{n} = - \infty$

## 3) Suites particulières :

### a) Suites arithmétiques: $u_n = u_0 + n \times r$

Si $r > 0$ , $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante

$u_n = u_0 + n \times r$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r = + \infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = + \infty$ $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Si $r < 0$ , $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante

$u_n = u_0 + n \times r$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r = - \infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = - \infty$ $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

### b) Suites géométriques: $u_n = u_0 \times q^n$

Si $q > 1$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = + \infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm \infty$ ( dépend du signe de $u_0$ )

la suite $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Si $q = 1$ la suite est constante, $u_n = u_0$ et donc convergente de limite $u_0$.

Si $- 1 < q < 1$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

la suite $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Si $q \leq - 1$ la suite $( u_n )_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

## 4) Méthode de recherche des limites :

### a) Suites définies par une fonction:

Si $u_n = f(n)$ et si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ (avec $a \in \mathbb{R}$ , $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ ) alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$.

**Attention : La réciproque est fausse !!**

$f(x) = \cos(2\pi x)$ f n'a pas de limite en $+\infty$.

mais $u_n = f(n) = \cos(2\pi \times n) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

donc $(u_n)$ est une suite constante et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ .

### b) Comparaisons:

Si, à partir d'un certain rang, deux suites convergentes vérifient $u_n \leq v_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$ .

Théorème des gendarmes :

Si, à partir d'un certain rang, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell$

alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Applications :

Si $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Si $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ avec $v_n \leq u_n$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Si $\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ avec $u_n \leq w_n$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

*Exemple :* $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

### c) Théorèmes de convergence (admis ):

Si une suite $(u_n)$ est croissante et majorée par un réel M alors cette suite est convergente et sa limite $\ell$ vérifie $\ell \leq M$.

Si une suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par un réel m alors cette suite est convergente et sa limite $\ell$ vérifie $\ell \geq m$.

ATTENTION ! Ces théorèmes ne donnent pas la limite de la suite. Ils assurent juste son existence.

# III. Opérations sur les limites :

a représente soit un réel , soit $+\infty$ , soit $-\infty$ .

1) Somme de deux suites :

| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ <br> $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell + \ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | **F.I** |
| $+\infty$ | $+\infty$ | **F.I** | $+\infty$ |

2) Produit de deux suites :

| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ <br> $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ <br> $\ell' \neq 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}$ <br> $\ell \neq 0$ | $\ell \times \ell'$ | $-\infty$ si $\ell > 0$ <br> $+\infty$ si $\ell < 0$ | $+\infty$ si $\ell > 0$ <br> $-\infty$ si $\ell < 0$ | $0$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ si $\ell' > 0$ <br> $+\infty$ si $\ell' < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **F.I** |
| $+\infty$ | $+\infty$ si $\ell' > 0$ <br> $-\infty$ si $\ell' < 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | **F.I** |
| $0$ | $0$ | **F.I** | **F.I** | $0$ |

3) Inverse d'une suite :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ | $\ell \in \mathbb{R}$ <br> $\ell \neq 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} =$ | $\dfrac{1}{\ell}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ si $u_n > 0$ <br> $-\infty$ si $u_n < 0$ |

4) Quotient de deux suites :

$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = u_n \times \left(\dfrac{1}{v_n}\right)$. On applique alors les règles des produits et de l'inverse ( 2 et 3 ).

5) Formes indéterminées :

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Pour lever une indétermination il faudra transformer l'expression du terme général de la suite, soit en factorisant et en simplifiant ensuite l'expression, soit en développant l'expression, soit en faisant preuve d'ingéniosité !