APPLICATIONS DE LA DERIVATION

I. Dérivée et sens de variation :

1) TP Géogébra

Inspiré des activités 1 et 2 p 138 (Manuel Hatier Variations Maths 2019)

Activité 1 :

On donne la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$.

1) a) A l'aide de géogebra, tracer la courbe représentative de la fonction f.

Saisie: Fonction(<Fonction>, <de>, <à>)

Remplacer <Fonction> par (1/3)*x^3–x+2 ; <de> par –3 et <à> par 3.

b) Compléter par lecture graphique, le tableau de variations de f sur $[-3\,;3]$

x	-3		-1		1		3
Variations de f	-4	↗	$\frac{8}{3}$	↘	$\frac{4}{3}$	↗	8

2) a) Créer un curseur a avec l'outil curseur . Intervalle : $[-3\,;3]$ Incrément : 0,1.
Placer le point A (a ; f(a)) .

Saisie: A= (a , f(a))

Bouger la valeur du curseur et vérifier que le point A se déplace sur la courbe de f.

b) Créer la tangente à la courbe de f au point A à l'aide de l'outil tangente .
Bouger la valeur du curseur et vérifier que la tangente se déplace avec le point A.

c) Compléter le tableau suivant en vous servant de l'équation réduite de la tangente affichée dans la fenêtre d'algèbre.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	8	3	0	–1	0	3	8

3) Conjecturer un lien entre le signe du nombre dérivé et les variations de la fonction f.

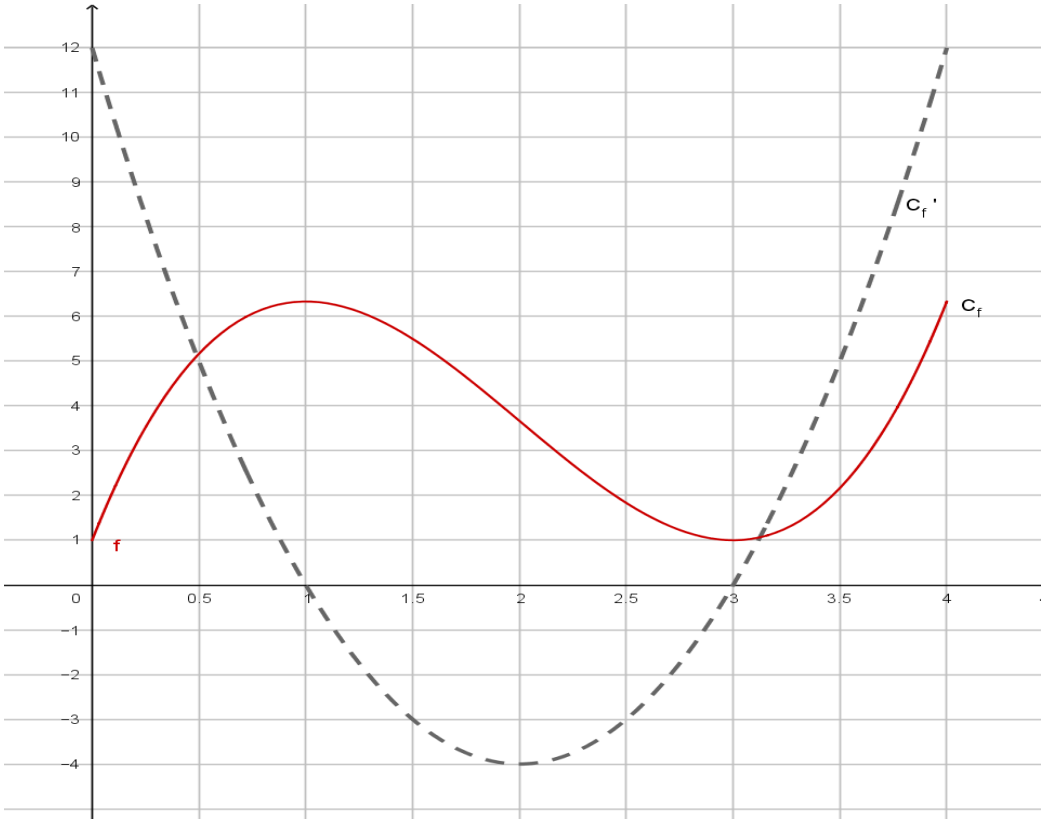
Il semble que lorsque $f'(x)$ est positive, la fonction f est croissante et que lorsque $f'(x)$ est négative, la fonction f est décroissante

Activité 2 :

1) Dans le plan muni d'un repère, on a représenté :

en trait plein, la courbe d'une fonction f définie sur [0 ; 4]

en pointillés, la courbe de la fonction f' sur [0 ; 4].



a) Par lecture graphique, compléter le tableau de signes de la dérivée $f'(\boldsymbol{x})$ et le tableau de variations de la fonction f sur [0 ; 4] .

$\boldsymbol{x}$	0		1		3		4
Signes de $f'(x)$		+	0	–	0	+	

$\boldsymbol{x}$	0		1		3		4
Variations de f	1	↗	6,2	↘	1	↗	12

b) Conjecturer un lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

Il semble que lorsque $f'(x)$ est positive, la fonction f est croissante et que lorsque $f'(x)$ est négative, la fonction f est décroissante

2) A l'aide de géogébra, représenter la fonction $g(x) = -x^2$ et sa dérivée.

$g'(x) = -2x$

Signe de $g'(x)$: $-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

La dérivée est donc positive sur $]-\infty ; 0[$, nulle en 0 et négative sur $]0 ; +\infty[$

La fonction g est donc croissante sur $]-\infty ; 0[$ puis décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Compléter par lecture graphique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signes de $g'(x)$		+	0	–	
Variations de g		↗	0	↘	

3) A l'aide de géogébra, représenter la fonction $h(x) = -x^3 + 3x - 2$ et sa dérivée.

$h'(x) = -3x^2 + 3$

Signe de $h'(x)$: h' est un trinôme . $\Delta = 36$ $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$

La dérivée est donc négative (signe de a) sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$,

nulle en -1 et 1 et positive sur $]-1 ; 1[$

La fonction h est donc décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$

et croissante sur $]-1 ; 1[$.

Compléter par lecture graphique :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signes de $h'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de h		↘	-4	↗	0	↘	

4) La conjecture établie au 1)b) est-elle encore vérifiée ?

Oui.

2) Théorèmes

a) Théorème n°1

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement décroissante sur I.**
- **Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.**

Démonstration : voir livre p 134

b) Théorème n°2 :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si f est croissante sur I alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geq 0$.**
- **Si f est constante sur I alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.**
- **Si f est décroissante sur I alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leq 0$.**

Démonstration : voir livre p 135

c) Applications

(i) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

Signe de $f'(x)$: $f'(x)$ est un trinôme donc pour étudier son signe il faut calculer Δ.

$$\Delta = 36 - 4 \times 6 \times (-12) = 324$$

$$x_1 = \frac{-6-18}{12} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+18}{12} = 1$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signes de $f'(x)$		+ signe de a	0	–	0	+ signe de a	
variations de f		↗	27	↘	0	↗	

(ii) On considère la fonction g définie sur $[0; 9]$ par $g(x) = \frac{5+x}{1+x}$.

Dresser le tableau de variation de g.

$$g'(x) = \frac{1(1+x) - 1(5+x)}{(1+x)^2} = \frac{-4}{(1+x)^2}$$

Signe de $g'(x)$: $-4 < 0$ et $(1+x)^2 > 0$ donc $g'(x) < 0$

Tableau de variations :

x	0	9
signes de $g'(x)$	–	
variations de g	5 ↘	1,4

<u>Exercices sur dérivées et sens de variation :</u>

n° 29 et 30 page 144.

n° 32 ; 33 ; 35 et 37 page 145.

n° 45 ; 47 ; 50 ; 51 ; 52 et 56 page 147.